上 册 目 录

第一章　理想流体

§ 1. 连续方程

流体动力学研究流体(液体和气体)的运动. 因为流体动力学中考察的现象是宏观的，所以把流体看作连续介质. 这意味着对流体中的任何小体元,总是假定它大得仍然包含非常大量的分子. 因此,当我们谈到无限小体元时,总是指"物理上"的无限小，也就是说,它与所讨论的物体体积相比很小,而与分子间距离相比却很大. 对**流体质点**和**流体中的点**这些术语，都应作类似的理解. 例如,当我们谈到某流体质点的位移时,我们不是指某一个别分子的位移,而是指包含有许多分子的体元的位移,虽然后者仍旧作为一个点来处理.

可以用一些函数来对运动流体的状态作数学描述. 这些函数给出流体的速度分布$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}(x, y, z, t)$和流体中任何两个热力学量的分布,例如压力$p(x, y, z, t)$和密度$\rho(x, y, z, t)$. 如所周知,只要给定任意两个热力学量的值,同时给定状态方程,所有的热力学量都可由此确定;因此,如果我们给定了五个量，即速度$\boldsymbol{v}$的三个分量、压力p和密度ρ,则运动流体的状态就完全确定了.

一般来说,所有这些量都是坐标x, y, z和时间t的函数.应当强调指出，$\boldsymbol{v}(x, y, z, t)$是在给定时间$t$和空间给定点$(x, y, z)$上的流体速度,也就是说,它是属于空间固定点的，而不是属于流体中特定质点的;后者在时间过程中要经常改变其空间位置.这一说明同样适用于ρ和p.

现在来推导流体动力学的基本方程组，我们从表示物质守恒

的方程开始．考虑空间的某个体积 V_0，该体积中流体的质量是 $\int \rho dV$，其中，ρ 是流体密度，积分遍及整个体积 V_0．单位时间内流过体积界面面元 $d\boldsymbol{f}$ 的流体质量是 $\rho\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{f}$；矢量 $d\boldsymbol{f}$ 的大小等于面元的面积，方向则沿面元的法线方向．按照惯例，我们取 $d\boldsymbol{f}$ 沿外法向．于是，如果流体流出该体积，则 $\rho\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{f}$ 为正；如果流进该体积，则为负．所以，单位时间内流出体积 V_0 的流体总质量是

$$\oint \rho\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{f},$$

其中，积分取在包围该体积的整个封闭曲面上．

其次，单位时间内体积 V_0 中减少的流体质量可以写成

$$-\frac{\partial}{\partial t}\int \rho dV.$$

使上面两个式子相等，得

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \rho dV = -\oint \rho\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{f}. \tag{1.1}$$

利用格林公式，可以将曲面积分变换为体积分：

$$\oint \rho\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{f} = \int \nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v})dV.$$

于是

$$\int\left[\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v})\right]dV = 0.$$

因为这个方程必须对任何体积都成立，所以被积函数必须为零，即

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v}) = 0. \tag{1.2}$$

这就是**连续方程**．把表达式 $\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v})$ 展开，我们也可以将(1.2)式写为

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \rho\nabla\cdot\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla\rho = 0. \tag{1.3}$$

矢量

$$\boldsymbol{j}=\rho \boldsymbol{v}$$

称为**质量通量密度**，它的方向就是流体运动的方向，而它的大小等于单位时间内流过与速度垂直的单位面积的流体质量.

§ 2. 欧拉方程

我们考虑流体中的某个体积，作用在这个体积上的合力等于压力的积分:

$$-\oint p d\boldsymbol{f},$$

其积分域为该体积的界面. 将它变为体积分，有

$$-\oint p d\boldsymbol{f}=-\int \nabla p dV.$$

由此得知，任何体元dV周围的流体作用在该体元上的力为$-dV\nabla p$. 换言之，可以说有等于$-\nabla p$的力作用在单位体积的流体上.

现在，我们使作用力$-\nabla p$等于单位体积的质量(ρ)与加速度$d\boldsymbol{v}/dt$的乘积，就可以写出流体体元的运动方程

$$\rho \frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=-\nabla p. \tag{2.1}$$

这里出现的导数$d\boldsymbol{v}/dt$，并不是空间固定点上流体速度的变化率，而是一个给定的流体质点当它在空间中运动时的速度变化率. 但这个导数应当用在空间固定点上给定的量来表示. 为此，应当提及，一个给定流体质点在时间间隔dt中的速度变化$d\boldsymbol{v}$由两部分组成，就是空间一固定点上的速度经过时间dt后的变化和相距为$d\boldsymbol{r}$的两点(在同一瞬时)的速度差，其中，$d\boldsymbol{r}$是给定流体质点经过时间dt所移动的距离. 第一部分为$(\partial \boldsymbol{v}/\partial t)dt$，这里的偏导数$\partial \boldsymbol{v}/\partial t$是对不变的$x, y, z$，即在空间给定点上取的. 第二部分是

$$dx\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x}+dy\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial y}+dz\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial z}=(d\boldsymbol{r}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}.$$

于是,

$$d\boldsymbol{v}=\left(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}\right)dt+(d\boldsymbol{r}\cdot\nabla)\boldsymbol{v},$$

或者,两边同除以 dt,有

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}. \tag{2.2}$$

将它代入(2.1)式,我们得到

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}=-\frac{1}{\rho}\nabla p. \tag{2.3}$$

这就是所要求的流体运动方程,它是由欧拉在1755年首先得到的,称为**欧拉方程**,是流体动力学基本方程之一.

如果流体处于重力场中,则有附加力 $\rho\boldsymbol{g}$ 作用在任何一个单位体积上,其中 $\boldsymbol{g}$ 是重力加速度.这个力必须加在方程(2.1)的右边.这样,方程(2.3)就取下列形式

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}=-\frac{1}{\rho}\nabla p+\boldsymbol{g}. \tag{2.4}$$

在推导运动方程时,我们没有考虑能量耗散过程.在运动流体中,由于流体的内摩擦(粘性)和流体不同部分之间的热交换,会发生这种过程.所以,本章的这一节以及以后各节的全部讨论,只适用于导热和粘性都不起重要作用的流体运动,这种流体称为**理想流体**.

流体各部分之间(当然,还包括流体和相邻物体之间)没有热交换,这意味着整个流体中发生的运动都是绝热的.因此,理想流体的运动必须假设为绝热的.

在绝热运动中,当任何质点在空间改变其位置时,它的熵保持不变.单位质量的熵记为 s,我们可以将绝热运动条件表示为

$$\frac{ds}{dt}=0, \tag{2.5}$$

这里和(2.1)式一样，对时间的全导数表示一个给定流体质点在运动中的熵变化率．这一条件也可以写为

$$\frac{\partial s}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\nabla s=0. \tag{2.6}$$

这是描述理想流体绝热运动的普遍方程．应用(1.2)式，我们可以把它写成熵的“连续方程”：

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho s)+\nabla\cdot(\rho s\boldsymbol{v})=0, \tag{2.7}$$

乘积 $\rho s\boldsymbol{v}$ 为“熵通量密度”．

必须记住，绝热方程通常取一种更简单的形式．如果像经常遇到的那样，在某个初始时刻流体整个体积中的熵为一常数，则在所有时刻，并且对于任何后续运动，熵将到处保持为同一常数．在这种情况下，我们就可以将绝热方程简单地写为

$$s=\text{常数}. \tag{2.8}$$

后面，我们将经常这样用．这样一种运动称为**等熵运动**．

我们可以利用等熵运动这一事实，把运动方程(2.3)写成稍许不同的形式．为此，我们运用熟悉的热力学关系

$$dw=Tds+Vdp,$$

其中 w 是单位质量流体的焓，$V=1/\rho$ 是比容，T 是温度．因为 $s=$ 常数，就有

$$dw=Vdp=\frac{dp}{\rho},$$

从而，

$$\frac{\nabla p}{\rho}=\nabla w.$$

因此，方程(2.3)可以写成如下形式

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}=-\nabla w. \tag{2.9}$$

还应提及欧拉方程的另一种形式，其中仅仅包含速度．应用矢量分析中的熟知公式

$$\frac{1}{2}\nabla v^2=\boldsymbol{v}\times(\nabla\times\boldsymbol{v})+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v},$$

可以把(2.9)式写成

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}+\frac{1}{2}\nabla v^2-\boldsymbol{v}\times(\nabla\times\boldsymbol{v})=-\nabla w. \tag{2.10}$$

如果在方程两边取旋度，就得到

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\boldsymbol{v})=\nabla\times[\boldsymbol{v}\times(\nabla\times\boldsymbol{v})], \tag{2.11}$$

上式仅仅包含速度.

有了运动方程，还需补充列出在流体界面上必须满足的边界条件．对于理想流体，边界条件显然指流体不能穿透固体表面．这意味着，如果界面处于静止，垂直于界面的流体速度分量必须为零，即

$$v_n=0. \tag{2.12}$$

在运动界面的一般情形下，v_n必须等于界面速度的相应分量.

在两种互不混合的流体之间的边界上，边界条件为两种流体的压力和垂直于分界面的速度分量必须相同，并且每个垂直速度分量都必须等于界面速度的相应分量.

正如在§1的开头就说过的，运动流体的状态被五个量——速度 $\boldsymbol{v}$ 的三个分量，以及，譬如说，压力 p 和密度 ρ ——确定．因此，流体动力学完备方程组的方程数必须是五个．对于理想流体，这些方程就是欧拉方程、连续方程和绝热方程.

问　题

写出关于变数 a、t 的理想流体一维运动方程，其中 a（称为拉格朗日变

量[1])是流体质点在某一时刻 $t=t_0$ 的 x 坐标.

解: 在这些变数下,任一质点在任何时刻的 x 坐标可看作 t 和它的初始时刻坐标 a 的函数: $x=x(a, t)$. 于是,在流体元的运动过程中,质量守恒条件(连续方程)可写为 $\rho dx=\rho_0 da$, 或者

$$\rho\left(\frac{\partial x}{\partial a}\right)_t=\rho_0,$$

$\rho_0(a)$ 是给定的初始密度分布. 根据定义, 流体质点的速度是 $v=(\partial x/\partial t)_a$, 而导数 $(\partial v/\partial t)_a$ 给出质点在运动过程中的速度变化率. 欧拉方程变为

$$\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_a=-\frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\partial p}{\partial a}\right)_t,$$

绝热方程则是

$$\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)_a=0.$$

§ 3. 流体静力学

对于均匀重力场中的静止流体,欧拉方程(2.4)的形式为

$$\nabla p=\rho \boldsymbol{g}, \tag{3.1}$$

这个方程描述了流体的力学平衡. (如果不存在外力,平衡方程就是 $\nabla p=0$, 即 $p=$ 常数; 流体中每一点的压力相同.)

如果可以假设流体的密度在整个体积中不变,也就是说,如果在外力作用下流体没有显著压缩,方程(3.1)就能直接积分. 取 z 轴垂直向上, 我们有

$$\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{\partial p}{\partial y}=0, \qquad \frac{\partial p}{\partial z}=-\rho g.$$

因此

$$p=-\rho g z+\text{常数}.$$

如果静止流体在高度 h 上有一自由面, 在自由面的每一点上作用

---

[1] 必须说明, 虽然这些变量通常称为拉格朗日变量, 但是, 欧拉在得出方程(2.3)的同时,已第一次得出这些变量下的运动方程.

相同的外压力 p_0, 则该自由面必为水平平面 $z=h$. 根据 $z=h$ 时 $p=p_0$ 的条件，我们求得常数为 $p_0+\rho gh$, 所以

$$p=p_0+\rho g(h-z). \tag{3.2}$$

对于非常大的液体团以及对于气体，密度 ρ 一般不能假定为常数；这一点特别适用于气体(例如大气). 让我们假设流体不仅处于力学平衡而且也处于热平衡，于是，各点上的温度都相同. 方程(3.1)可按下列步骤积分. 利用熟知的热力学关系

$$d\Phi=-sdT+Vdp,$$

其中，Φ 是单位质量流体的热力学势. 当温度不变时，

$$d\Phi=Vdp=\frac{dp}{\rho}.$$

由此看出，在这种情况下表达式 $\nabla p/\rho$ 可以写成 $\nabla\Phi$, 从而平衡方程(3.1)有下列形式：

$$\nabla\Phi=\boldsymbol{g}.$$

当 $\boldsymbol{g}$ 是沿负 z 轴方向的一个常矢量时，我们有

$$\boldsymbol{g}\equiv-\nabla(gz).$$

于是

$$\nabla(\Phi+gz)=0,$$

由此，我们得出在整个流体中有

$$\Phi+gz=\text{常数}; \tag{3.3}$$

gz 是单位质量流体在重力场中的势能. 由统计物理可知，条件(3.3)即为处于外力场中的体系达到热力学平衡的条件.

这里，我们可以指出方程(3.1)的另一个简单结论. 如果流体(如大气)在重力场中处于力学平衡，它的压力可以仅为高度 z 的函数(因为，如果同一高度不同点上的压力不同，则将引起运动). 于是，从(3.1)式得出密度

$$\rho=-\frac{1}{g}\frac{dp}{dz} \tag{3.4}$$

也只是 z 的函数．而由压力和密度就可以确定温度，所以，温度也只是 z 的函数．这样，对在重力场中达到力学平衡的流体，其压力、密度和温度分布仅仅依赖于高度．比方说，如果同一高度不同点上的温度不同，那么力学平衡是不可能的．

最后，我们来推导非常大流体团（如恒星）的平衡方程，其中流体各部分是由于引力的吸引而结合在一起的．设 ϕ 为流体引力场的牛顿引力势，它满足微分方程

$$\triangle\phi=4\pi G\rho, \tag{3.5}$$

其中，G 为牛顿引力常数．引力加速度为 $-\nabla\phi$，所以作用在质量 ρ 上的力就是 $-\rho\nabla\phi$．因此，平衡条件是

$$\nabla p=-\rho\nabla\phi.$$

两边同除以 ρ，并同取散度，再利用方程(3.5)，就得到

$$\nabla\cdot\left(\frac{1}{\rho}\nabla p\right)=-4\pi G\rho. \tag{3.6}$$

必须强调指出，这里的讨论仅仅考虑了力学平衡，方程(3.6)并不以存在完全的热平衡为前提．

如果星体不是旋转的，当它处于平衡时将呈球状；并且，密度和压力分布也将是球对称的．因此，在球坐标中，方程(3.6)的形式为

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(\frac{r^2}{\rho}\frac{dp}{dr}\right)=-4\pi G\rho. \tag{3.7}$$

§4. 不发生对流的条件

流体可以处于力学平衡（即不出现宏观运动）而并不同时处于热平衡．即使流体中温度不是常数，作为力学平衡条件的方程(3.1)还是可以得到满足的．但是，由此却产生了关于这种平衡的稳定性问题．人们发现，只有当一定的条件得到满足时，平衡才是稳

定的．否则，平衡就是不稳定的；而且，这种不稳定将导致流体的流动，促使流体混合，使得温度趋于均匀．这种运动称为对流．因此，力学平衡成为稳定的条件也就是不发生对流的条件，它可以用以下办法推导出来．

考虑 z 高度处的一个流体元，其比容为 $V(p, s)$，p 和 s 是 z 高度处的平衡压力和熵．假设该流体元经历了一个向上的绝热移动，通过一段小路程 ξ；于是，它的比容变为 $V(p', s)$，其中 p' 是 $z+\xi$ 高度处的压力．为了使平衡稳定，一个必要（虽然一般不是充分的）条件是，作用在流体元上的合力趋于使它回到原来位置．这意味着流体元必须比它在新位置上所"排出"的流体重一些．后者的比容是 $V(p', s')$，s' 是 $z+\xi$ 高度处的平衡熵．因此，我们有稳定性条件

$$V(p', s')-V(p', s)>0.$$

将这一差值展成 $s'-s=(ds/dz)\xi$ 的幂级数，得到

$$\left(\frac{\partial V}{\partial s}\right)_p \frac{ds}{dz}>0. \tag{4.1}$$

热力学公式给出

$$\left(\frac{\partial V}{\partial s}\right)_p=\frac{T}{c_p}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p,$$

其中 c_p 为定压比热．c_p 和 T 都是正数，因此，(4.1) 式可以写成

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \frac{ds}{dz}>0. \tag{4.2}$$

绝大多数物质加热后膨胀，即

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p>0.$$

因此，不发生对流的条件为

$$\frac{ds}{dz}>0, \tag{4.3}$$

即熵必须随高度而增加.

由此,我们不难求得温度梯度 dT/dz 必须满足的条件. 展开导数 ds/dz,有

$$\frac{ds}{dz}=\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p\frac{dT}{dz}+\left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T\frac{dp}{dz}$$
$$=\frac{c_p}{T}\frac{dT}{dz}-\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p\frac{dp}{dz}>0.$$

最后,由(3.4)式将

$$\frac{dp}{dz}=-\frac{g}{V}$$

代入,我们得到

$$\frac{dT}{dz}>-\frac{gT}{c_pV}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p. \tag{4.4}$$

如果温度随高度的增加而下降,并且温度梯度值超过 $(gT/c_pV)\cdot(\partial V/\partial T)_p$,对流就可能发生.

假如我们考虑一个完全气体的柱体的平衡,那么

$$\frac{T}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p=1,$$

于是,稳定平衡的条件简化为

$$\frac{dT}{dz}>-\frac{g}{c_p}. \tag{4.5}$$

§5. 伯努利方程

在定常流的情况下,流体动力学方程可大为简化. 所谓**定常流**,是指流体所占有空间的任何一点上,其速度不随时间变化的流动. 换句话说,$\boldsymbol{v}$ 只是坐标的函数,因而

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}=0.$$

于是,方程(2.10)化为

$$\frac{1}{2}\nabla v^2-\boldsymbol{v}\times(\nabla\times\boldsymbol{v})=-\nabla w. \tag{5.1}$$

现在我们引进**流线**的概念．流线是这样的一些曲线，线上任何一点的切向，给出了该点速度的方向；它们由下面的微分方程组确定：

$$\frac{dx}{v_x}=\frac{dy}{v_y}=\frac{dz}{v_z}. \tag{5.2}$$

在定常流中，流线不随时间变化，并且和流体质点的迹线相一致．在非定常流中，这种一致性就不再存在：流线的切向给出了给定瞬时空间各点上流体质点速度的方向；而迹线的切向则给出了给定流体质点在不同时刻的速度方向．

将方程(5.1)标乘以流线上每一点的切向单位矢量，这个单位矢量记作 $\boldsymbol{l}$．大家知道，梯度在任何方向的投影就是沿那个方向的方向导数．因此，∇w 在 $\boldsymbol{l}$ 上的投影为 $\partial w/\partial l$．矢量 $\boldsymbol{v}\times(\nabla\times\boldsymbol{v})$ 垂直于 $\boldsymbol{v}$，所以，它在 $\boldsymbol{l}$ 方向的投影为零．于是，由方程(5.1)我们得到

$$\frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{1}{2}v^2+w\right)=0.$$

由此可知，$\frac{1}{2}v^2+w$ 沿流线为一常数：

$$\frac{1}{2}v^2+w=\text{常数}. \tag{5.3}$$

对于不同的流线，该常数一般取不同的值．方程(5.3)称为**伯努利方程**．

如果流动发生在重力场内，重力加速度 $\boldsymbol{g}$ 必须加到方程(5.1)的右边．取重力方向作为 z 轴，并令向上时 z 增大，那么，$\boldsymbol{g}$ 和 $\boldsymbol{l}$ 方向的夹角余弦就等于 $-dz/dl$．从而，$\boldsymbol{g}$ 在 $\boldsymbol{l}$ 上的投影就是

$$-g\frac{dz}{dl}.$$

于是，我们就有

$$\frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{1}{2}v^2+w+gz\right)=0.$$

因此，伯努利方程表明，沿一条流线

$$\frac{1}{2}v^2+w+gz=\text{常数}. \tag{5.4}$$

§6. 能量通量

我们选取空间中的某个固定流体元，并求包含在这个体元中的能量如何随时间变化. 单位体积流体的能量是

$$\frac{1}{2}\rho v^2+\rho\varepsilon,$$

其中，第一项是动能，第二项是内能，ε 是单位质量流体的内能. 这个能量的变化由偏导数

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho v^2+\rho\varepsilon\right)$$

给出.

为了计算这个量，我们可写出

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho v^2\right)=\frac{1}{2}v^2\frac{\partial\rho}{\partial t}+\rho\boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t},$$

或者，利用连续方程(1. 2)和运动方程(2. 3)，有

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho v^2\right)=-\frac{1}{2}v^2\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v})-\boldsymbol{v}\cdot\nabla p-\rho\boldsymbol{v}\cdot(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}.$$

在最后一项中用 $\frac{1}{2}\boldsymbol{v}\cdot\nabla v^2$ 代换 $\boldsymbol{v}\cdot(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}$，并用 $\rho\nabla w-\rho T\nabla s$ 代换 ∇p $\left(\text{利用热力学关系 } dw=Tds+\frac{1}{\rho}dp\right)$，得到

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho v^2\right)=-\frac{1}{2}v^2\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v})$$

$$-\rho\boldsymbol{v}\cdot\nabla\left(\frac{1}{2}v^2+w\right)+\rho T\boldsymbol{v}\cdot\nabla s.$$

为了变换导数 $\partial(\rho\varepsilon)/\partial t$, 我们利用热力学关系

$$d\varepsilon=Tds-pdV=Tds+\frac{p}{\rho^2}d\rho\ .$$

因为

$$\varepsilon+\frac{p}{\rho}=\varepsilon+pV$$

就是单位质量流体的焓 w, 我们得到

$$d(\rho\varepsilon)=\varepsilon d\rho+\rho d\varepsilon=wd\rho+\rho Tds,$$

因此

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\varepsilon)=w\frac{\partial\rho}{\partial t}+\rho T\frac{\partial s}{\partial t}=-w\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v})-\rho T\boldsymbol{v}\cdot\nabla s.$$

这里, 我们也利用了普遍的绝热方程(2.6).

综合以上结果, 我们求得能量的变化率为

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho v^2+\rho\varepsilon\right)=-\left(\frac{1}{2}v^2+w\right)\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v})$$

$$-\rho\boldsymbol{v}\cdot\nabla\left(\frac{1}{2}v^2+w\right),$$

或者, 最后写成

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho v^2+\rho\varepsilon\right)=-\nabla\cdot\left[\rho\boldsymbol{v}\left(\frac{1}{2}v^2+w\right)\right]. \tag{6.1}$$

为了弄清楚这个方程的意义, 我们将它对某个体积积分:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\left(\frac{1}{2}\rho v^2+\rho\varepsilon\right)dV=-\int\nabla\cdot\left[\rho\boldsymbol{v}\left(\frac{1}{2}v^2+w\right)\right]dV,$$

或者, 将右边的体积分转换为曲面积分, 即

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\left(\frac{1}{2}\rho v^2+\rho\varepsilon\right)dV=-\oint\rho\boldsymbol{v}\left(\frac{1}{2}v^2+w\right)\cdot d\boldsymbol{f}. \tag{6.2}$$

左边是某个给定体积中流体能量的变化率, 所以右边的积分就是单位时间内流出该体积的能量. 由此可见, 表达式

$$\rho \boldsymbol{v}\left(\frac{1}{2} v^{2}+w\right) \tag{6.3}$$

可以称为**能量通量密度**矢量，其数值为单位时间内通过垂直于速度方向的单位面积的能量.

表达式(6.3)表明，任何单位质量的流体在运动期间携带着 $w+\frac{1}{2}v^2$ 的能量. 这里出现焓 w 而不是内能 ε，这一事实具有明显的物理意义：代入

$$w=\varepsilon+\frac{p}{\rho},$$

可以将通过一个封闭曲面的能量通量写为

$$-\oint \rho \boldsymbol{v}\left(\frac{1}{2} v^{2}+\varepsilon\right) d \boldsymbol{f}-\oint p \boldsymbol{v} \cdot d \boldsymbol{f}.$$

第一项是单位时间内被流体物质携带通过曲面的能量(动能和内能)，第二项是作用在曲面内部流体上的压力所做的功.

§ 7. 动量通量

我们来对流体动量作类似的讨论. 单位体积流体的动量是 $\rho\boldsymbol{v}$，现在来确定它的变化率 $\partial(\rho\boldsymbol{v})/\partial t$. 使用张量符号①，我们有

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i)=\rho\frac{\partial v_i}{\partial t}+\frac{\partial \rho}{\partial t}v_i$$

利用连续方程(1.2)(将 $\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v})$ 写成 $\partial(\rho v_k)/\partial x_k$ 的形式)

---

① 拉丁字母下标 $i,k,\cdots$ 取值 1,2,3，分别对应于矢量和张量沿 x, y, z 轴的分量. 我们将把 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=A_1B_1+A_2B_2+A_3B_3=\Sigma A_iB_i$ 类型的和，省去求和符号而简写为 A_iB_i 的形式. 在所有包含矢量或张量的乘积中，也将采用类似的处理：当一个拉丁字母下标在任何一项中出现两次时，总是理解为对所有 1,2,3 的值求和. 这种下标有时称为**哑标**. 在使用哑标时，应当记住，任何一对这样的下标可以用任何其它一对相同的字母来替换，因为下标总要取遍所有可能的值，所以，用什么样的下标符号显然不影响其和值.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}=-\frac{\partial(\rho v_k)}{\partial x_k}$$

和下列形式的欧拉方程

$$\frac{\partial v_i}{\partial t}=-v_k\frac{\partial v_i}{\partial x_k}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i},$$

我们得到

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i)=-\rho v_k\frac{\partial v_i}{\partial x_k}-\frac{\partial p}{\partial x_i}-v_i\frac{\partial(\rho v_k)}{\partial x_k}$$
$$=-\frac{\partial p}{\partial x_i}-\frac{\partial}{\partial x_k}(\rho v_i v_k).$$

把右边第一项写成如下形式①

$$\frac{\partial p}{\partial x_i}=\delta_{ik}\frac{\partial p}{\partial x_k},$$

从而最后得到

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i)=-\frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k}, \tag{7.1}$$

其中张量 Π_{ik}定义为

$$\Pi_{ik}=p\delta_{ik}+\rho v_i v_k. \tag{7.2}$$

这个张量显然是对称的.

为了阐明张量 Π_{ik}的意义，将方程(7.1)对某个体积进行积分，即

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \rho v_i dV=-\int\frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k}dV.$$

右边的积分用格林公式变换为曲面积分②:

---

① δ_{ik} 表示单位张量，即当 $i=k$ 时分量为1、当 $i\neq k$ 时分量为零的张量. 显然，$\delta_{ik}A_k=A_i$，其中 A_i 为任何矢量. 与此类似，如果 A_{kl} 为二阶张量，我们有关系式 $\delta_{ik}A_{kl}=A_{il}$，$\delta_{ik}A_{ik}=A_{ii}$ 等等.

② 将一个封闭曲面积分变换为一个以该曲面为界面的体积上的积分，其规则可以陈述如下：面元 df_i 必须以算符 $dV\frac{\partial}{\partial x_i}$代换，也就是将这个算符作用到整个被积函数上.

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \rho v_i dV = -\oint \Pi_{ik} df_k. \tag{7.3}$$

左边是所讨论的体积内第 i 个动量分量的变化率. 因此, 右边的曲面积分就是单位时间内通过界面流出的动量数值. 从而, $\Pi_{ik}df_k$为流过面元 df 的第 i 个动量分量. 如果将 df_k写成 $n_k df$ 的形式, 其中 df 是面元的面积, $\boldsymbol{n}$ 是沿外法向的单位矢量, 我们就发现, $\Pi_{ik}n_k$ 是第 i 个动量分量通过单位表面积的通量. 可以指出, 按照(7.2)式

$$\Pi_{ik}n_k = pn_i + \rho v_i v_k n_k.$$

这个表达式能够写成矢量形式

$$p\boldsymbol{n} + \rho \boldsymbol{v}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}). \tag{7.4}$$

因此, Π_{ik}是单位时间内流过垂直于 x_k轴的单位面积的第 i 个动量分量. 张量 Π_{ik}称为**动量通量密度张量**. 能量为一标量, 能量通量由一矢量确定; 然而, 动量通量却要由一个二阶张量确定, 因为动量本身为一矢量.

矢量(7.4)给出了 $\boldsymbol{n}$ 方向的动量通量, 即通过垂直于 $\boldsymbol{n}$ 的表面的动量通量. 特别是, 取$\boldsymbol{n}$的方向平行于流体速度, 我们就发现, 在这个方向上只输运动量的纵向分量, 且其通量密度为 $p+\rho v^2$. 而在垂直于速度的方向上, 只输运动量(相对于 $\boldsymbol{v}$)的横向分量, 它的通量密度就是 p.

§ 8. 环量守恒

沿某个封闭曲线的积分

$$\Gamma = \oint \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{l}$$

称为绕该曲线的**速度环量**.

现考察某时刻在流体中画出的一条封闭曲线. 我们想象它是

一条“流体周线”，即它是由此时处于该周线上的流体质点所组成的．在时间过程中，这些质点改变其位置，所以周线也随着它们改变位置．我们来研究速度环量将发生什么样的变化．换句话说，我们来计算时间导数

$$\frac{d}{dt}\oint \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{l}.$$

因为我们是求运动着的“流体周线”上速度环量的变化，而不是求空间固定周线上速度环量的变化，所以这里我们把它写成为对时间的全导数．

为了避免混淆，我们暂且将对坐标的微分用符号 δ 表示，而将符号 d 留着表示对时间的微分．其次我们指出，周线的线元$d\boldsymbol{l}$可以写成线元两端点矢径$\boldsymbol{r}$的差$\delta\boldsymbol{r}$．因此，我们可将速度环量写作 $\oint \boldsymbol{v}\cdot\delta\boldsymbol{r}$．当对时间微分此积分时，必须牢记，不仅速度，而且周线本身（即它的形状）也是变化的．所以，在积分号下取微分时，我们不仅必须微分$\boldsymbol{v}$，而且也要微分 $\delta\boldsymbol{r}$：

$$\frac{d}{dt}\oint \boldsymbol{v}\cdot\delta\boldsymbol{r}=\oint\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\cdot\delta\boldsymbol{r}+\oint\boldsymbol{v}\cdot\frac{d\delta\boldsymbol{r}}{dt}.$$

因为速度 $\boldsymbol{v}$正好是矢径 $\boldsymbol{r}$ 的时间导数，我们有

$$\boldsymbol{v}\cdot\frac{d\delta\boldsymbol{r}}{dt}=\boldsymbol{v}\cdot\delta\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\boldsymbol{v}\cdot\delta\boldsymbol{v}=\delta\left(\frac{1}{2}v^2\right).$$

然而，全微分在一条封闭曲线上积分为零；所以，第二个积分为零，结果剩下

$$\frac{d}{dt}\oint \boldsymbol{v}\cdot\delta\boldsymbol{r}=\oint\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\cdot\delta\boldsymbol{r}.$$

现在，尚须用方程(2.9)的表达式

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=-\nabla w$$

来代替加速度 $d\boldsymbol{v}/dt$．利用斯托克斯公式，并由于 $\nabla\times(\nabla w)\equiv 0$，

即有

$$\oint \frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\cdot\delta\boldsymbol{r}=\int\left[\nabla\times\left(\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\right)\right]\cdot\delta\boldsymbol{f}=0.$$

于是，回到前面的符号，就得到①

$$\frac{d}{dt}\oint\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{l}=0.$$

或者

$$\oint\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{l}=\text{常数}. \tag{8.1}$$

因此，我们得出结论：在理想流体中，绕一封闭“流体”周线的速度环量不随时间变化(**开尔芬定理或环量守恒定律**).

必须强调指出，这一结果是用(2.9)形式的欧拉方程求得的，因此，它包含流动为等熵流这一假设．对于非等熵流，该定理不成立②.

§9. 势流

由环量守恒定律，可以导出一个重要的结果．我们首先假设流动是定常的，并考虑一条已知其某点 $\boldsymbol{\omega}\equiv\nabla\times\boldsymbol{v}$(**涡量**)为零的流线．我们在该点近旁画一条任意的包围流线的无穷小封闭曲线．根据斯托克斯定理，沿任何无穷小周线的环量等于 $\nabla\times\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{f}$，其中 $d\boldsymbol{f}$ 为此周线所围的面元．因为现在所考虑的周线位于 $\boldsymbol{\omega}\equiv 0$ 点的近旁，所以沿此周线的速度环量为零．随着时间的推移，此周线随流体一起运动，但总是保持无穷小，且依然环绕同一流线．于是，由于速度环量必须保持为一常数(这里为零)，在这条流线上 $\boldsymbol{\omega}$ 一定处处为零.

① 此结果在均匀重力场中仍然正确，因为此情况下 $\nabla\times\boldsymbol{g}\equiv 0$.

② 数学上，在 p 和 ρ 之间必需存在一一对应关系[对于等熵流，即 $s(p,\rho)=$常数]；此时，$-(1/\rho)\nabla p$ 可以写成某个函数的梯度．这个结果是推导开尔芬定理所必需的.

这样，我们得到结论：如果流线上任一点 $\omega=0$，则在此流线的所有点上，ω 也为零. 假使流动为非定常的，这一结论依然成立. 只是必须用由某个特定的流体质点在时间过程中画出的迹线来代替流线①. 我们知道，在非定常流中，迹线和流线一般是不重合的.

初看起来，这一结论似乎可作为以下推理的基础. 我们来考虑某物体的定常绕流. 设来流在无穷远处是均匀的，来流速度 $\boldsymbol{v}$ 为一常数；因此，无穷远处所有流线上的 $\omega\equiv0$. 于是，我们就可以断定，沿所有流线，即在整个空间，ω 等于零.

整个空间内 $\omega=0$ 的流动称为**势流**或**无旋流**. 反之，涡量不处处为零的流动称为**有旋流**. 因此，我们可以得出结论：若来流在无穷远处是均匀的，则它对任何物体的定常绕流必定是势流.

与此相仿，由环量守恒定律，我们似乎还可以作如下推理：假设某一瞬时整个流体内都是势流，则沿流体中任何封闭曲线的速度环量为零②. 按开尔芬定理，我们就能断言，这种情形在以后的任何时刻将保持不变. 也就是说，我们将得出：只要流动在某一时刻为势流，它将在以后任何时刻都是势流(特别是，任何开始于静止状态的流动必为势流). 这与下述事实是一致的，即如果 $\omega=0$，方程(2.11)总是满足的.

然而事实上，所有这些结论都有很大的局限性. 原因是，上面关于沿整个流线 $\omega=0$ 的证明，严格说来，对于绕流物体表面上的流线是不正确的，因为物体表面的存在使我们无法在流体中作出

① 为避免误解，我们要指出这个结论在湍流中是没有意义的(参看第三章). 还应注意，当流线上有激波通过时，可以产生非零的涡量. 以后将会知道，这是因为那种流动已不再是等熵流，故不能导出环量守恒定律(§106).

② 这里为简单起见，我们假设流体充满空间的一个单连通区域. 对多连通域，也可以得到同样的最后结论，但必须在推导中对周线的选择加上一些限制条件.

一条环绕这种流线的封闭曲线. 因此，理想流体运动方程允许有这样的解: 在物体表面上发生所谓**分离**,即曾在一段距离上贴物面而过的流线,从某点开始和物面分离,进入到流体内部. 所得到的流动图象其特征为，存在一个由物体表面延伸出去的“切向间断面”,在这个面上,流体的速度处处和该曲面相切,并在它上面出现一个间断. 换句话说，沿着切向间断面，一层流体在另一层流体上面“滑移”. 图 1 表示了一个间断面，它将运动流体和物体后方的滞止流体区域分开. 从数学的观点看，切向速度分量的间断面相当于一个涡量不为零的曲面[①].

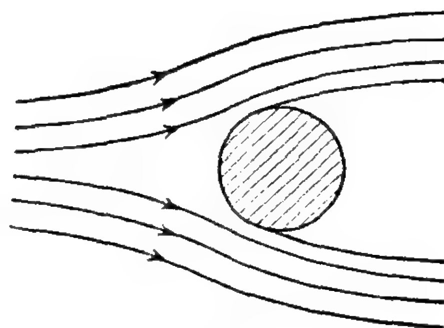


图 1

如果把这类间断流包括在内，理想流体运动方程的解就不是唯一的: 除了一个连续流解以外,还允许有无限多个具有切向间断面的解，这些间断面可以从绕流物面上任何一条预定的曲线上开始延伸出去. 但必须强调指出的是,这样的间断解没有一个在物理上具有重要意义,因为切向间断完全是不稳定的. 因此事实上,这种流动将变为湍流(参看第三章).

绕给定物体流动的实际物理问题当然有唯一解,理由是,事实上并不存在理想流体. 任何真实流体总有一定的粘性，虽然也许很小. 这种粘性对大部分流体的运动实际上可以没有什么影响,但无论粘性多么小,在紧贴物体的薄薄一层流体内,它将会起重要作用. 这种边界层内的流动性质，决定了如何从理想流体运动方程的无限多个解当中挑选一个适当的解. 不过人们发现，在任意形状物体绕流的一般情况下,分离流解是不能采用的; 因为，如果

① 事实上,在理想流体运动中，此处的涡量为无限大，故切向间断面也称**涡面**——中译者注.

出现分离，势必导致湍流.

尽管有上述情况，对连续定常有势绕流，研究其运动方程的解在某些情况下还是有意义的. 虽然在任意形状物体绕流的一般情况下，真实流动图象和势流图象几乎毫不相干；但是，对于某些特殊形状的物体（"流线形物体"—— § 46），真实流动和势流却可以相差甚微. 更确切地说，除了物面上薄薄一层流体和物体后方比较狭窄的"尾流"区以外，流动是势流.

势流的另一个重要实例是淹没在流体中的物体作微振动时发生的情况. 容易证明，如果振动的幅度 a 远小于物体的线度 $l(a\ll l)$，物体的绕流将为势流. 为了证明这一点，我们估计一下欧拉方程

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}=-\nabla w$$

中各项的数量级.

当通过的距离具有物体线尺度 l 的量级时，流体速度 $\boldsymbol{v}$ 发生显著的变化（变化量和物体振动速度 $\boldsymbol{u}$ 为同一数量级）. 因此，速度 $\boldsymbol{v}$ 对坐标的导数的量级为 u/l，速度 $\boldsymbol{v}$ 本身的数量级（在与物体相距很小的范围内）则决定于 $\boldsymbol{u}$ 的大小，从而我们有

$$(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}\sim\frac{u^2}{l}.$$

导数 $\partial\boldsymbol{v}/\partial t$ 的数量级为 ωu，这里 ω 是振动的频率. 因为

$$\omega\sim\frac{u}{a},$$

则有

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}\sim\frac{u^2}{a}.$$

于是，由不等式

$$a\ll l,$$

可以知道$(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}$远小于$\partial\boldsymbol{v}/\partial t$，因此可略去不计．这样，流体的运动方程就变为

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}=-\nabla w.$$

在方程两边取旋度，我们得到

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\boldsymbol{v})=0,\quad 即\quad \nabla\times\boldsymbol{v}=常数.$$

但在振动中速度的时间平均值为零，所以，$\nabla\times\boldsymbol{v}=$常数也就意味着

$$\nabla\times\boldsymbol{v}=0.$$

因此，作为一次近似，进行小振动的流体运动是势流．

现在，可以得到势流的某些一般性质．我们首先回想一下，环量守恒定律的推导及其全部推论都是建立在等熵流假设的基础上的．如果流动不是等熵的，该定律就不成立．因而，即使某一时刻存在势流，在以后的时刻涡量一般也不为零．所以，事实上只有等熵流才能是势流．

按照斯托克斯定理

$$\oint \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{l}=\int\nabla\times\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{f},$$

其中，右边的积分域是以所讨论曲线为周界的曲面．从而得知，势流中任何封闭曲线上的速度环量都是零：

$$\oint \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{l}=0. \tag{9.1}$$

特别是，由此可以推断在势流中不可能存在闭合的流线①．因为，既然流线上每一点的切向，就是该点速度的方向，那么沿这种曲线

① 这一结论如同(9.1)式一样，对多连通空间域内的运动可能是不正确的．如果计算环量的封闭曲线不越过区域边界就不可能缩至一点，则在这个区域内的势流中，速度环量可以不为零．

的环量决不为零.

有旋运动中，速度的环量通常不为零. 在此情况下，可以存在闭合的流线. 但是，必须强调指出，闭合流线的存在并不是有旋运动的必要性质.

和任何无旋的矢量场一样，势流中的速度可以表示为某个标量的梯度，这个标量称为**速度势**，记作 ϕ：

$$\boldsymbol{v}=\nabla\phi. \tag{9.2}$$

写出(2.10)形式的欧拉方程

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}+\frac{1}{2}\nabla v^2-\boldsymbol{v}\times(\nabla\times\boldsymbol{v})=-\nabla w,$$

并以 $\boldsymbol{v}=\nabla\phi$ 代入，我们有

$$\nabla\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}+\frac{1}{2}v^2+w\right)=0,$$

由此得

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}+\frac{1}{2}v^2+w=f(t), \tag{9.3}$$

这里，$f(t)$是时间的任意函数. 这个等式是势流方程的一个初积分. 等式(9.3)中的函数 $f(t)$ 可以为零而不致失去普遍性；因为既然速度是 ϕ 的空间导数，我们就可以在 ϕ 上加任何一个时间的函数. 以 $\phi+\int f(t)dt$ 代替 ϕ，得等式(9.3)的右边为零.

对于定常运动，我们有(使势函数 ϕ 与时间无关)

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}=0,\quad f(t)=\text{常数},$$

于是，(9.3)式就变为伯努利方程

$$\frac{1}{2}v^2+w=\text{常数}. \tag{9.4}$$

这里要强调的是，势流的伯努利方程和其它流动的伯努利方程有一个重大差别：在一般情况下，右边的“常数”沿任一给定流线不

变，但对不同的流线为不同的值；而在势流中，它对整个流体而言都是不变的. 这一点提高了伯努利方程在势流研究中的重要性.

§ 10. 不可压缩流体

在许多液体流动(也有些气体流动)的情况下，可假设流体的密度是不变的，就是说，可以设它在整个流体空间和在整个流动过程中为一常数. 换言之，在这种情况下，流体不存在显著的压缩或膨胀. 我们称之为**不可压缩流**.

对于不可压缩流体，流体动力学的一般方程组可以大大简化. 的确，如果我们令 $\rho=$ 常数，欧拉方程没有什么改变，只是方程(2.4)中的 ρ 可以放到梯度算符下面:

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}=-\nabla\left(\frac{p}{\rho}\right)+\boldsymbol{g}. \tag{10.1}$$

但是另一方面，当 ρ 为常数时，连续方程取以下简单的形式:

$$\nabla\cdot\boldsymbol{v}=0. \tag{10.2}$$

既然密度不再象一般情况那样是一个未知函数，不可压缩流体的流体动力学基本方程组就可以化为只含速度变量的方程组. 这个方程组就是连续方程(10.2)加上方程(2.11):

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\boldsymbol{v})=\nabla\times[\boldsymbol{v}\times(\nabla\times\boldsymbol{v})]. \tag{10.3}$$

对于不可压缩流体，伯努利方程可以写成更简单的形式. 方程(10.1)和一般的欧拉方程(2.9) 不同之处在于它用 $\nabla(p/\rho)$ 替换了 ∇w. 因此，我们只要将 p/ρ 代替(5.4)式中的焓，就可直接写出伯努利方程

$$\frac{1}{2}v^2+\frac{p}{\rho}+gz=\text{常数}. \tag{10.4}$$

对于不可压缩流体，我们还可将能量通量表达式(6.3)中的 w 以 p/ρ 代替，就变为

$$\rho \boldsymbol{v}\left(\frac{1}{2}v^2+\frac{p}{\rho}\right). \tag{10.5}$$

这是因为，由熟知的热力学关系，我们有内能变化的表达式

$$d\varepsilon = Tds - pdV;$$

而当

$$s = 常数 \quad 和 \quad V = \frac{1}{\rho} = 常数$$

时，就有

$$d\varepsilon = 0, \; 即 \quad \varepsilon = 常数.$$

由于能量表达式中的常数项是无关紧要的，所以我们可以在

$$w = \varepsilon + \frac{p}{\rho}$$

中略去ε.

不可压缩流体势流的方程特别简单. 如果$\nabla \times \boldsymbol{v} = 0$, 方程(10.3)自然满足. 作代换 $\boldsymbol{v} = \nabla\phi$, 方程(10.2)就变成

$$\Delta\phi = 0, \tag{10.6}$$

也就是关于速度势 ϕ 的拉普拉斯方程①. 此方程还须加上流体与固体接触面处的边界条件：在静止的固体表面上，垂直于物面的流体速度分量v_n必须为零；对运动着的固体表面，v_n则必须等于表面运动速度的法向分量（是时间的给定函数）. 而速度 v_n 又等于速度势 ϕ 的法向导数：$v_n = \partial\phi/\partial n$. 因此，一般的边界条件为，边界上的 $\partial\phi/\partial n$ 是坐标和时间的给定函数.

对于势流，速度和压力由方程(9.3)相联系. 在不可压缩流体中，这个方程里的w 可用 p/ρ 代换：

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}v^2 + \frac{p}{\rho} = f(t). \tag{10.7}$$

① 速度势 ϕ 是欧拉第一次引入的，他得到了(10.6)形式的方程，这种方程后来被称为拉普拉斯方程。

这里我们可以指出，不可压缩流体的势流具有下述重要性质．设有一固体穿过流体而运动，如果结果产生势流，则任何时刻的流动只取决于运动物体在该时刻的速度，而与，譬如说，它的加速度无关．这是因为，方程(10.6)不显含时间，时间只能通过边界条件进入解式，而边界条件又只含运动物体的速度．

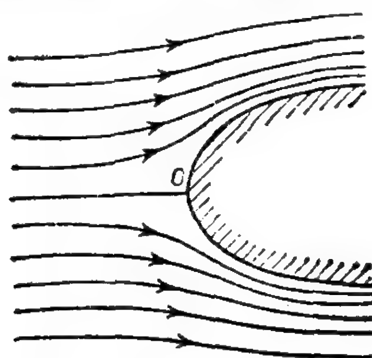


图 2

由伯努利方程

$$\frac{1}{2}v^2+\frac{p}{\rho}=\text{常数},$$

我们看出：在不可压缩流体的定常流中(不考虑重力场)，最大压力出现在速度为零的点上，这种点通常是在绕流物体的表面上(如图2中的 O 点)，它称为**驻点**．如果 $\boldsymbol{u}$ 是来流速度（即无穷远处的流体速度)，p_0 是无穷远处的压力，驻点的压力即为

$$p_{\max}=p_0+\frac{1}{2}\rho u^2. \tag{10.8}$$

假如运动流体的速度分布仅决定于两个坐标(比方说，x和y)，并且速度处处平行于 xy 平面，这种流动叫做**二维流**或**平面流**．为了解不可压缩流体的二维流问题，有时用所谓**流函数**来表示速度更为方便．由连续方程

$$\nabla\cdot\boldsymbol{v}\equiv\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}=0,$$

我们看出速度分量可以写成某个函数 $\psi(x,y)$的导数

$$v_x=\frac{\partial\psi}{\partial y},\quad v_y=-\frac{\partial\psi}{\partial x}, \tag{10.9}$$

$\psi(x,y)$就称为流函数．这样，连续方程将自动地满足．将(10.9)代入方程(10.3)，我们就得到流函数必须满足的方程

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta\psi-\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\Delta\psi+\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\Delta\psi=0. \tag{10.10}$$

如果我们知道了流函数，就能直接确定出定常流中的流线形状.(二维流的)流线微分方程是

$$\frac{dx}{v_x}=\frac{dy}{v_y} \quad 或 \quad v_y dx - v_x dy = 0;$$

它表示流线的切线方向即为速度方向. 以(10.9)式代入即有

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}dx+\frac{\partial\psi}{\partial y}dy = d\psi = 0,$$

由此

$$\psi = 常数.$$

于是，流线就是令流函数等于任意常数所得到的曲线族.

假使我们在 xy 平面上的两点 A 和 B 之间引一条曲线，则通过该曲线的质量通量 Q 可由这两点上流函数之差给出，而与曲线的形状无关. 因为，如果 v_n 是曲线上任一点的法向速度分量，我们有

$$Q=\rho\int_A^B v_n dl=\rho\int_A^B(-v_y dx+v_x dy)=\rho\int_A^B d\psi,$$

或者

$$Q=\rho(\psi_B-\psi_A). \tag{10.11}$$

现在有一些有效的方法可以解决不可压缩流体绕流各种剖面形状物体的二维势流问题，它们涉及到复变函数论的应用①. 这些方法的基本点如下，速度势、流函数和速度分量之间的关系为

$$v_x=\frac{\partial\phi}{\partial x}=\frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v_y=\frac{\partial\phi}{\partial y}=-\frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

而 ϕ 和 ψ 的导数之间的这些关系，正好是数学上所熟知的柯西-黎曼条件，它使复函数

① 下面两部著作中，有关于这些方法及其应用的较详细说明: Н. Е. Кочин, И. А. Кибель, Н. В. Розе: *Теоретическая Гидромеханика*, Ч. 1 Москва, 1948(柯钦，基别里，罗兹著，《理论流体力学》，曹俊等译，高等教育出版社，1956)；Л. И. Седов, *Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики*, Москва, 1950.

$$w=\phi+i\psi \tag{10.12}$$

成为复变量

$$z=x+iy$$

的解析函数. 这就表示, 函数 $w(z)$处处有完全确定的导数

$$\frac{dw}{dz}=\frac{\partial\phi}{\partial x}+i\frac{\partial\psi}{\partial x}=v_x-iv_y, \tag{10.13}$$

函数 w 称为**复势**, dw/dz 称为**复速度**. 复速度的模和幅角给出了速度的大小 v 以及速度方向与 x 轴之间的夹角 θ

$$\frac{dw}{dz}=ve^{-i\theta}. \tag{10.14}$$

在流体沿之流动的固体表面上, 速度必须沿切线方向. 就是说, 表面轮廓线必须是一条流线, 亦即沿表面有

$$\psi=\text{常数},$$

常数可以取为零. 因而, 给定边界曲线的绕流问题就归结为, 确定一个解析函数 $w(z)$ 使它在边界上取实数值. 当流体有自由表面时, 问题的表述要更复杂一些, 本节的问题 9 提供了一个例子.

众所周知, 解析函数沿一条封闭曲线 C 的积分, 等于该函数在曲线 C 内所有单极点上残数之和的 $2\pi i$ 倍. 因此

$$\oint w'dz=2\pi i\sum_k A_k,$$

其中, A_k 为复速度的残数. 还有

$$\begin{aligned}\oint w'dz&=\oint(v_x-iv_y)(dx+idy)\\&=\oint(v_xdx+v_ydy)+i\oint(v_xdy-v_ydx).\end{aligned}$$

上式的实数部分正好是沿曲线 C 的速度环量 Γ, 而虚数部分乘以 ρ 就是通过曲线 C 的质量通量. 如果曲线内没有流体的源, 则这个通量为零, 于是显然有下列关系

$$\Gamma=2\pi i\sum_k A_k; \tag{10.15}$$

在这种情形下，所有的残数 A_k 为纯虚数.

最后，我们研究一下流体可以看作不可压缩流体的条件. 当压力绝热地变化一个值 Δp 时，密度变化

$$\Delta\rho=\left(\frac{\partial\rho}{\partial p}\right)_s\Delta p.$$

然而，根据伯努利方程，定常流中 Δp 的数量级为 ρv^2. 因此有，

$$\Delta\rho\sim\left(\frac{\partial\rho}{\partial p}\right)_s\rho v^2.$$

在§63中，我们将证明，导数 $(\partial p/\partial\rho)_s$ 是流体中声速 c 的平方，于是

$$\Delta\rho\sim\rho\frac{v^2}{c^2}.$$

如果 $\Delta\rho/\rho\ll1$，流体就可作为不可压缩的. 所以我们可以看出，不可压缩流的一个必要条件为，流体速度应当远小于声速，即

$$v\ll c. \tag{10.16}$$

但是，这个条件只在定常流动中才是充分的. 在非定常流中，还有另外一个条件必须满足. 设 τ 和 l 为某种(特征)时间和(特征)长度，它们的量级就是流体速度发生显著变化所经过的时间和距离的量级. 又若欧拉方程中 $\partial\boldsymbol{v}/\partial t$ 和 $(1/\rho)\nabla p$ 两项的数量级相当，于是在量级上我们就得到

$$\frac{v}{\tau}\sim\frac{\Delta p}{l\rho}\quad\text{或者}\quad\Delta p\sim\frac{l\rho v}{\tau},$$

而 ρ 的相应变化则是

$$\Delta\rho\sim\frac{l\rho v}{\tau c^2}.$$

现在比较连续方程中 $\partial\rho/\partial t$ 和 $\rho\nabla\cdot\boldsymbol{v}$ 两项，我们就得到导数 $\partial\rho/\partial t$ 可以略去不计(即可设 ρ 为常数)的条件为

$$\frac{\Delta\rho}{\tau}\ll\frac{\rho v}{l},$$

或者

$$\tau \gg \frac{l}{c}. \tag{10.17}$$

如果条件(10.16)和(10.17)同时满足，流体即可看作不可压缩流体．条件(10.17)有一个明显的意义：声音讯号移动距离 l 所需的时间 l/c 必须远远小于流动发生显著变化所需要的时间 τ，这样，流体内相互作用的传播才可认为是瞬间实现的．

问　题

问题1． 设圆柱容器以恒角速度 Ω 绕它的(铅垂)轴旋转，试确定该容器内受重力场作用的不可压缩流体的表面形状．

解： 取圆柱轴作为 z 轴，因此 $v_x=-y\Omega$, $v_y=x\Omega$, $v_z=0$．连续方程自然满足，而欧拉方程(10.1)可写为

$$x\Omega^2=\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x},\quad y\Omega^2=\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y},\quad \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+g=0.$$

这些方程的通积分是

$$\frac{p}{\rho}=\frac{1}{2}\Omega^2(x^2+y^2)-gz+\text{常数}.$$

在自由面上 $p=$常数，所以表面为一抛物面

$$z=\frac{1}{2g}\Omega^2(x^2+y^2).$$

原点取在表面的最低点．

问题2． 设在不可压缩理想流体中，有一半径为 R 的球以速度 $\boldsymbol{u}$ 运动，试确定绕球运动流体的势流．

解： 无穷远处流体的速度必须为零．如所周知，拉普拉斯方程 $\Delta\phi=0$ 在无穷远处为零的解，是 $1/r$ 和 $1/r$ 对坐标的各阶偏导数(原点取在球心)．考虑到球的完全对称性，解式中只能出现一个常矢量，即速度 $\boldsymbol{u}$．并且，由于拉普拉斯方程和边界条件都是线性的，ϕ 必须线性地包含 $\boldsymbol{u}$．而能由 $\boldsymbol{u}$ 和 $1/r$ 的各阶导数构成的唯一标量是标积 $\boldsymbol{u}\cdot\nabla(1/r)$．所以，我们求得 ϕ 的形式为

$$\phi=\boldsymbol{A}\cdot\nabla\left(\frac{1}{r}\right)=-\frac{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}}{r^2},$$

其中，$\boldsymbol{n}$ 是 $\boldsymbol{r}$ 方向的单位矢量. 由边界条件，即速度 $\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{u}$ 在球面上的法向分量必须相等，也就是，$r=R$ 时有 $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}=\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}$，可以确定常矢量 $\boldsymbol{A}$. 这个条件给出 $\boldsymbol{A}=\frac{1}{2}\boldsymbol{u}R^3$，因此

$$\phi=-\frac{R^3}{2r^2}\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n},\quad \boldsymbol{v}=\frac{R^3}{2r^3}[3\boldsymbol{n}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n})-\boldsymbol{u}].$$

由方程(10.7)可求出压力分布：

$$p=p_0-\frac{1}{2}\rho v^2-\rho\frac{\partial\phi}{\partial t},$$

其中，p_0 为无穷远处的压力. 为了计算导数 $\partial\phi/\partial t$，必须记住原点(我们已经将它取在球的中心)是以速度 $\boldsymbol{u}$ 运动的. 所以

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}=\left(\frac{\partial\phi}{\partial\boldsymbol{u}}\right)\cdot\dot{\boldsymbol{u}}-\boldsymbol{u}\cdot\nabla\phi.$$

球面上的压力分布由公式

$$p=p_0+\frac{1}{8}\rho u^2(9\cos^2\theta-5)+\frac{1}{2}\rho R\boldsymbol{n}\cdot\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}$$

给出，这里 θ 是 $\boldsymbol{n}$ 与 $\boldsymbol{u}$ 之间的夹角.

问题3. 问题与题2相同，但改设有一无限长圆柱垂直于自身的轴运动①.

解：流动与轴向坐标无关，所以，我们应当解二维拉普拉斯方程. 在无穷远处为零的解是 $\ln r$ 对坐标的一阶和高阶导数，这里 $\boldsymbol{r}$ 是垂直于圆柱轴的矢量半径. 我们得到形如

$$\phi=\boldsymbol{A}\cdot\nabla\ln r=\frac{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}}{r}$$

的解，并由边界条件求得 $\boldsymbol{A}=-R^2\boldsymbol{u}$. 所以

$$\phi=-\frac{R^2}{r}\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n},\qquad \boldsymbol{v}=\frac{R^2}{r^2}[2\boldsymbol{n}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n})-\boldsymbol{u}].$$

柱面上的压力由公式

$$p=p_0+\frac{1}{2}\rho u^2\ (4\cos^2\theta-3)+\rho R\boldsymbol{n}\cdot\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}$$

① 绕椭球和椭圆柱势流这类更一般问题的解可以在下面的书中找到：Н. Е. Кочин, И. А. Кибель, Н. В. Розе. *Теоретическая гидромеханика*, Ч. 1, 265, 355 Москва 1948 (柯钦，基别里，罗兹，《理论流体力学》曹俊等译，高等教育出版社，1956)；H. Lamb, *Hydrodynamics*, 6th ed., § 103—116, Cambridge 1932.

给出.

问题4. 试确定以角速度 Ω 绕主轴旋转的椭球容器中不可压缩理想流体的势流,并求出流体的总角动量.

解: 我们在给定的时刻沿椭球的轴取一笛卡儿坐标 x, y, z, z 轴为旋转轴,容器内任意点的速度为

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}$$

因此,边界条件 $v_n=\partial\phi/\partial n=u_n$ 为

$$\frac{\partial\phi}{\partial n}=\Omega(xn_y-yn_x),$$

或者,利用椭球方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

可得

$$\frac{x}{a^2}\frac{\partial\phi}{\partial x}+\frac{y}{b^2}\frac{\partial\phi}{\partial y}+\frac{z}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial z}=xy\Omega\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right).$$

满足此边界条件的拉普拉斯方程的解是

$$\phi=\Omega\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}xy. \tag{1}$$

容器中流体的角动量为

$$M=\rho\int(xv_y-yv_x)\,dV.$$

在整个椭球体积 V 上积分,我们有

$$M=\frac{\Omega\rho V}{5}\frac{(a^2-b^2)^2}{a^2+b^2}.$$

公式(1)给出了流体相对于 x, y, z 轴瞬时位置的绝对运动,这些轴是固连在旋转容器上的.从绝对速度中减去速度 $\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}$ 得到相对于容器(即相对于旋转坐标系 x, y, z)的运动,流体的相对速度记为 $\boldsymbol{v}'$,我们有

$$v'_x=\frac{\partial\phi}{\partial x}+y\Omega=\frac{2\Omega a^2}{a^2+b^2}y,$$

$$v'_y=-\frac{2\Omega b^2}{a^2+b^2}x, \quad v'_z=0.$$

求方程组

$$\dot{x}=v'_x, \quad \dot{y}=v'_y$$

的积分,得到相对运动的迹线,即

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\text{常数},$$

它们和边界椭圆形状相似.

问题 5. 试确定驻点附近的流动(图 2).

解: 驻点附近物体表面的一小部分可以看成平面，我们把它取为 xy 平面. 将 ϕ 对小量 x, y, z 展开，保留到二阶项，我们有

$$\phi=ax+by+cz+Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Eyz+Fzx;$$

ϕ 中的常数项是可有可无的. 使 ϕ 满足方程 $\Delta\phi=0$ 和边界条件就可以定出常系数；这里的边界条件是：对 $z=0$ 和所有的 $x, y, v_z=\partial\phi/\partial z=0$；对 $x=y=z=0$(驻点)，$\partial\phi/\partial x=\partial\phi/\partial y=0$，由此得出

$$a=b=c=0;\quad C=-A-B,\quad E=F=0.$$

适当地旋转 x 和 y 轴，总可以消去 Dxy 项. 因此，我们有

$$\phi=Ax^2+By^2-(A+B)z^2. \tag{1}$$

如果流动对于 z 轴是轴对称的(绕旋成体的轴对称流)，必须有 $A=B$，从而

$$\phi=A(x^2+y^2-2z^2).$$

速度分量是

$$v_x=2Ax,\quad v_y=2Ay,\quad v_z=-4Az.$$

流线由方程(5.2)给出，由该方程我们求得

$$x^2z=c_1,\quad y^2z=c_2,$$

即流线是三次双曲线.

如果沿 y 方向为均匀流动(例如，沿 z 方向的来流绕流一圆柱体，柱轴为 y 方向)，(1)式中须有 $B=0$，因此，

$$\phi=A(x^2-z^2).$$

流线是双曲线

$$xz=\text{常数}.$$

问题 6. 试确定两个平面的交角附近的势流.

解: 在(垂直于交线的)横截面内，取极坐标 r, θ，原点位于交角顶点，θ 从角形的一边量起. 设交角为 α 弧度，对 $\alpha<\pi$，流动发生在角形的内部；对 $\alpha>\pi$，流动则在其外部. 法向速度为零的边界条件表明，当 $\theta=0$ 和 $\theta=\alpha$ 时，$\partial\phi/\partial\theta=0$. 满足这些条件的拉普拉斯方程的解可以写成[①]

① 因为 r 是一小量，我们取含 r 的最低正幂次的解.

$$\phi = Ar^n \cos(n\theta), \ n = \frac{\pi}{\alpha},$$

因此

$$v_r = nAr^{n-1}\cos(n\theta), \quad v_\theta = -nAr^n \sin(n\theta).$$

对于 $n<1$(角形的外部流动；图 3)，原点处 v_r 按 $1/r^{1-n}$ 的方式变为无限大，对于 $n>1$(角形的内部流动；图 4)，当 $r=0$ 时，v_r 变为零.

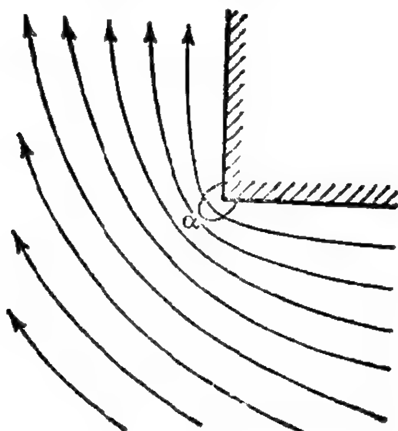


图 3

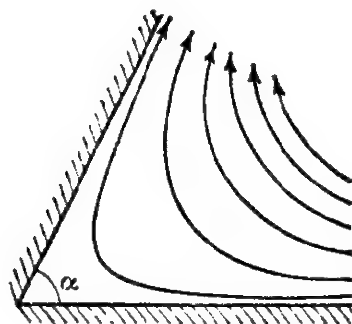


图 4

流函数是 $\psi = Ar^n \sin n\theta$，它给出流线的形状. 上面得到的 ϕ 和 ψ 的表达式是复势 $w = Az^n$ 的实部和虚部.

问题 7. 假设在充满全空间的不可压缩流体中，突然形成一个半径为 a 的球形空穴. 试确定流体充满空穴所需要的时间(瑞利 1917 年提出).

解: 空穴形成后的流动是球对称的，每一点的速度均指向空穴中心. 因为径向速度 $v_r \equiv v < 0$，我们得到球坐标的欧拉方程为

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}. \tag{1}$$

连续方程为

$$r^2 v = F(t) \tag{2}$$

这里，$F(t)$ 是时间的任意函数. 此方程表示这一事实：因为流体是不可压缩的，流过任一球面的流体体积与球面的半径无关.

将(2)式中的 v 代入(1)式，我们有

$$\frac{F'(t)}{r^2} + v\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}.$$

将此方程对 r 积分，从空穴的瞬时半径 $R = R(t) \leqslant a$ 积到无穷，就得到

$$-\frac{F'(t)}{R}+\frac{1}{2}V^2=\frac{p_0}{\rho}, \tag{3}$$

其中，$V=dR(t)/dt$ 是空穴半径的变化速率，而 p_0 是无穷远处的压力；无穷远处流体速度为零，空穴表面上的压力也为零．对于空穴表面上的点，由方程(2)我们求得

$$F(t)=R^2(t)V(t),$$

把 $F(t)$ 的这个表达式代入(3)式，得到方程

$$-\frac{3V^2}{2}-\frac{1}{2}R\frac{dV^2}{dR}=\frac{p_0}{\rho}.$$

由边界条件 $R=a, V=0$(流体一开始处于静止)，积分后有

$$V\equiv\frac{dR}{dt}=-\sqrt{\frac{2p_0}{3\rho}\left(\frac{a^3}{R^3}-1\right)}.$$

于是，我们得到流体充满空穴所需的总时间为

$$\tau=\sqrt{\frac{3\rho}{2p_0}}\int_0^a\frac{dR}{\sqrt{(a/R)^3-1}}.$$

这个积分可化为β函数，最后得出

$$\tau=\sqrt{\frac{3a^2\rho\pi}{2p_0}}\cdot\frac{\Gamma(5/6)}{\Gamma(1/3)}=0.915a\sqrt{\frac{\rho}{p_0}}.$$

问题 8. 设浸没在不可压缩流体中的球按给定的规律 $R=R(t)$ 膨胀，试确定球表面的压力．

解：设所求压力为 $P(t)$．除了 $r=R$ 处的压力是 $P(t)$ 而不是零以外，本题的计算与问题 7 的计算完全类似．将上题中的(3)式改写为方程

$$-\frac{F'(t)}{R}+\frac{1}{2}V^2=\frac{p_0}{\rho}-\frac{P(t)}{\rho},$$

相应地也可得到代替(4)的方程为

$$\frac{p_0-P(t)}{\rho}=-\frac{3V^2}{2}-RV\frac{dV}{dR}.$$

记住 $V=dR/dt$，我们可以把 $P(t)$ 的表达式写成以下形式：

$$P(t)=p_0+\frac{1}{2}\rho\left[\frac{d^2(R^2)}{dt^2}+\left(\frac{dR}{dt}\right)^2\right].$$

问题 9. 试确定由平面固壁上无限长缝隙射出的射流形状．

解：令固壁沿 xy 平面上的 x 轴，缝隙孔宽即为该轴上的线段 $-a/2\leqslant x\leqslant a/2$，流体充满 $y>0$ 的半平面，远离固壁处($y\to\infty$)流体速度为零，此处压力假定为 p_0．

在射流的自由面上(图 5a 中的 BC 和 $B'C'$),压力 $p=0$, 而根据伯努利方程速度为一恒值 $v_1=\sqrt{2p_0/\rho}$. 固壁线是流线,并且延伸到射流的自由边界. 设 ABC 线上 ψ 为零,于是 $A'B'C'$ 线上 $\psi=-Q/\rho$, 这里 $Q=\rho a_1 v_1$ 是流体进入射流的流率 (a_1, v_1 是无穷远处的射流宽度和速度). 沿 ABC 和 $A'B'C'$,速度势 ϕ 都是由 $-\infty$ 变化到 $+\infty$; 设 B 和 B' 处 ϕ 为零. 因此, 在复变量 w 的平面上,流动区域为一宽度为 Q/ρ 的无限长条(图 5b). (图 5b, c, d 中的点是与图 5a 中的点对应地标注的.)

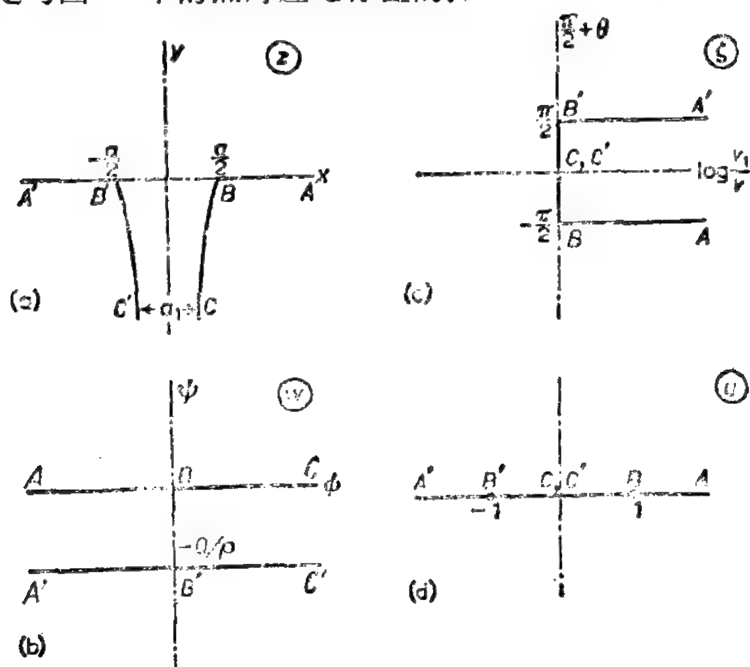


图 5[1]

我们引入一个新的复变量,即复速度的对数

$$\zeta=-\ln\left[\frac{1}{v_1 e^{\frac{1}{2}i\pi}}\frac{dw}{dz}\right]=\ln\frac{v_1}{v}+i\left(\frac{1}{2}\pi+\theta\right);\tag{1}$$

这里, $v_1 e^{\frac{1}{2}i\pi}$ 是射流在无穷远处的复速度. 在 $A'B'$ 上,有 $\theta=0$; 在 AB 上, $\theta=-\pi$; 在 BC 和 $B'C'$ 上, $v=v_1$; 而在无穷远处的射流中, $\theta=-\pi/2$[2]. 所以,在复变量 ζ 的平面内, 流动区域是右半平面内宽度为 π 的一个半无限长条(图 5c). 如果现在能找到一个保角变换, 将 w 平面内的长条变换为 ζ 平面内的半长条(各点的对应关系如图 5 所示), 我们就可把 w 作为 dw/dz 的函

① 英文本原图 5(b)和(c)标注有误,现已改正. ——中译者注.

② 原著和英译本此处为 $\theta=\pi/2$, 负号是中译者加的.

数求出，于是w就可通过简单的求积得到.

为了得到所需要的变换，我们进一步引进一个辅助复变量u，使u平面内的流动区域为上半平面，点B和B'对应于$u=\pm1$，点C和C'对应于$u=0$，无穷远点A和A'对应于$u=\pm\infty$(图 5d). 将u平面的上半平面变换为w平面内一长条区域的保角变换给出了w对这个辅助变量的依赖关系. 按照上述的点对应关系，这一变换是

$$w=-\frac{Q}{\rho\pi}\ln u. \tag{2}$$

为了得到ζ对u的依赖关系，我们应当找一个将ζ平面内的半长条区域变换为上半个u平面的保角变换. 将此半长条域看成一个顶点在无穷远处的三角形，我们可以借助熟知的许瓦兹-克里斯托弗 (Schwarz-Christoffel)公式得到所需的变换；它就是

$$\zeta=-i\arcsin u. \tag{3}$$

公式(2)和(3)给出问题的解，因为它们提供了dw/dz和w之间参数形式的依赖关系.

现在我们来确定射流的形状. 在BC上，我们有$w=\phi$，$\zeta=i(\pi/2+\theta)$；同时，u从 1 变到 0. 由(2)和(3)我们得到

$$\phi=-\frac{Q}{\rho\pi}\ln(-\cos\theta), \tag{4}$$

而由(1)式有

$$\frac{d\phi}{dz}=v_1 e^{-i\theta},$$

或者

$$dz\equiv dx+i\,dy=\frac{1}{v_1}e^{i\theta}d\phi=\frac{a_1}{\pi}e^{i\theta}\operatorname{tg}\theta\,d\theta,$$

于是，利用$\theta=-\pi$时$y=0$，$x=\frac{1}{2}a$的条件，通过积分，我们就可求得以参数形式表示的射流形状. 特别是，射流的收缩比为

$$\frac{a_1}{a}=\frac{\pi}{\pi+2}=0.61.$$

§ 11. 有势绕流的阻力

我们来研究不可压缩理想流体绕某一固体流动的势流问题.

当然，这一问题是和该固体在流体中运动产生的流动问题完全等价的．由前一流动求后一流动，只需要转换坐标系，在新坐标系中，无穷远处的流体处于静止．事实上，我们下面要讲的，就是固体在流体中运动的情形．

让我们判断一下远离运动物体的流体速度分布特性．不可压缩流体的势流满足拉普拉斯方程

$$\Delta\phi=0.$$

我们应该考虑这个方程在无穷远处为零的解①，因为流体在那里是静止的．我们把原点取在运动物体内的某一点上，坐标系随物体运动，研究某一特定时刻的流体速度分布．我们知道，拉普拉斯方程有一个解 $1/r$，其中 r 是离开原点的距离．$1/r$ 的梯度和更高阶的空间导数也是方程的解，所有这些解以及它们的任何一种线性组合在无穷远处都为零．因此，在远离物体的地方，拉普拉斯方程解的一般形式是

$$\phi=-\frac{a}{r}+\boldsymbol{A}\cdot\nabla\left(\frac{1}{r}\right)+\cdots,$$

其中，a 和 $\boldsymbol{A}$ 与坐标无关，略去的项含有 $1/r$ 的高阶导数．不难看出，常数 a 必须为零．因为，速度势 $\phi=-a/r$ 给出速度

$$\boldsymbol{v}=-\nabla\left(\frac{a}{r}\right)=\frac{a\boldsymbol{r}}{r^3}.$$

我们计算一下通过某个封闭曲面，比方说，半径为 R 的球面的质量通量．在此曲面上，速度为常数并等于 a/R^2；因此，通过它的总通量是

$$\rho\frac{a}{R^2}4\pi R^2=4\pi\rho a.$$

而不可压缩流体通过任何一个封闭曲面的通量当然必须为零，所

① 确切的提法应该是考虑那些在无穷远处 $\nabla\phi=0$ 的解——中译者注．

以，我们断定 $a=0$。

这样，ϕ 就只含 $1/r^2$ 阶和更高阶的项．因为我们是求远距离处的速度，所以高阶项可以略去，从而有

$$\phi=\boldsymbol{A}\cdot\nabla\left(\frac{1}{r}\right)=-\frac{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}}{r^2}. \tag{11.1}$$

速度 $\boldsymbol{v}=\nabla\phi$ 是

$$\boldsymbol{v}=(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\nabla\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{3(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{n}-\boldsymbol{A}}{r^3}, \tag{11.2}$$

其中，$\boldsymbol{n}$ 是 $\boldsymbol{r}$ 方向的单位矢量．由此可知，在远距离处速度按 $\frac{1}{r^3}$ 的方式减小．矢量 $\boldsymbol{A}$ 取决于物体的实际形状和速度，它只有当考虑了运动物体表面上相应的边界条件，并在一切距离上完全解出了方程 $\Delta\phi=0$ 后才能确定．

(11.2) 式中出现的矢量 $\boldsymbol{A}$ 与绕流中流体的总动量和总能量之间存在着一定形式的关系．流体的总动能（不可压缩流体的内能是不变的）为

$$E=\frac{1}{2}\int\rho v^2dV,$$

其中积分是对物体外的整个空间进行的．我们取某一空间区域V，它的外边界是一个半径为 R 的大球面，球心在原点．先在区域 V 上积分，然后再令 R 趋向无穷，我们有下列恒等式

$$\int v^2dV=\int u^2dV+\int(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u})(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})dV,$$

其中，$\boldsymbol{u}$ 是物体的速度．因为 $\boldsymbol{u}$ 与坐标无关，右边第一项积分显然就是 $u^2(V-V_0)$，这里 V_0 是物体的体积．在第二项积分中，将和式 $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}$ 写成 $\nabla(\phi+\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{r})$，利用 $\nabla\cdot\boldsymbol{v}=0$(连续方程)和 $\nabla\cdot\boldsymbol{u}\equiv0$，即有

$$\int v^2dV=u^2(V-V_0)+\int\nabla\cdot[(\phi+\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{r})(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})]dV.$$

现在将第二个积分变换为在球面 S 和物体表面 S_0 上的曲面积分

$$\int v^2 dV = u^2(V - V_0) + \oint_{S+S_0} (\phi + \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{r})(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})\cdot d\boldsymbol{f}.$$

根据边界条件，在物面上 $\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{u}$ 的法向分量是相等的，而 $d\boldsymbol{f}$ 沿表面的法线方向，所以显然有 S_0 上的积分恒等于零. 在远处的曲面 S 上，我们代入 ϕ 和 $\boldsymbol{v}$ 的表达式(11.1)和(11.2)，并略去那些当 $R\to\infty$ 时变为零的项. 将球面 S 上的面元写成 $d\boldsymbol{f}=\boldsymbol{n}R^2do$，其中 do 为面元所对的立体角，就得到

$$\int v^2 dV = u^2\left(\frac{4}{3}\pi R^3 - V_0\right) + \int [3(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n})(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}) - (\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n})^2 R^3] do.$$

最后，进行积分①，并乘以 $\rho/2$，我们得到流体总能量的下列表达式：

$$E = \frac{1}{2}\rho(4\pi\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{u} - V_0 u^2). \tag{11.3}$$

已经说过，矢量 $\boldsymbol{A}$ 的准确计算需要知道方程 $\Delta\phi=0$ 在考虑特定物面边界条件时的完全解. 但是，$\boldsymbol{A}$ 对物体速度 $\boldsymbol{u}$ 的依赖关系的一般性质，却可以直接从下述事实中得到：方程对于 ϕ 是线性的，并且边界条件对于 ϕ 和 $\boldsymbol{u}$ 也都是线性的，从而可知，$\boldsymbol{A}$ 一定是 $\boldsymbol{u}$ 分量的线性函数，于是(11.3)式给出的能量 E 为 $\boldsymbol{u}$ 分量的二次函数，可写成下列形式：

---

① 对于 o 的积分，等价于求被积函数沿所有 $\boldsymbol{n}$ 方向的平均值再乘以 4π. 如 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 为常矢量，为求

$$(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n})(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n}) \equiv A_i n_i B_k n_k$$

类型表达式的平均值，应注意平均值 $\overline{n_i n_k}$ 构成一个对称张量，它可以用单位张量 δ_{ik} 表示：$\overline{n_i n_k}=a\delta_{ik}$. 将张量对下标 i 和 k 缩并，并记住 $n_i n_i=1$，可得 $a=1/3$，从而有

$$\overline{(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n})(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n})} = \frac{1}{3}\delta_{ik}A_i B_k = \frac{1}{3}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}.$$

$$E=\frac{1}{2}m_{ik}u_iu_k. \tag{11.4}$$

这里，m_{ik} 是某个常对称张量，它的分量可由 $\boldsymbol{A}$ 的分量算出. m_{ik} 称为**诱导质量张量**.

知道了能量 E，我们就可以得到流体总动量 $\boldsymbol{P}$ 的表达式. 为此，我们指出 E 和 $\boldsymbol{P}$ 的无穷小变化之间存在下列关系：

$$dE=\boldsymbol{u}\cdot d\boldsymbol{P}①.$$

由此可见，如果 E 由公式(11.4)表示，$\boldsymbol{P}$ 的分量必须是

$$P_i=m_{ik}u_k. \tag{11.5}$$

最后，比较公式(11.3)(11.4)和(11.5)，表明 $\boldsymbol{P}$ 可以用 $\boldsymbol{A}$ 表示，式子为

$$\boldsymbol{P}=4\pi\rho\boldsymbol{A}-\rho V_0\boldsymbol{u}. \tag{11.6}$$

必须指出，流体的总动量是一个完全确定的有限值.

单位时间内由物体传递给流体的动量为 $d\boldsymbol{P}/dt$，加上一个相反的符号显然就是流体的反作用力 $\boldsymbol{F}$，它也就是作用在物体上的力：

$$\boldsymbol{F}=-\frac{d\boldsymbol{P}}{dt}. \tag{11.7}$$

---

① 因为，设物体被某个外力 $\boldsymbol{F}$ 加速，流体的动量将因此而增加. 设在 dt 时间内，动量增加为 $d\boldsymbol{P}$，这个增量和力的关系是 $d\boldsymbol{P}=\boldsymbol{F}dt$. 将此式点乘矢量 $\boldsymbol{u}$，我们就得到 $\boldsymbol{u}\cdot d\boldsymbol{P}=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u}dt$，这也就是力 $\boldsymbol{F}$ 作用 $\boldsymbol{u}dt$ 距离时所做的功，它又应当等于流体能量的增量 dE.

应当注意，直接用对整个流体的积分 $\int\rho\boldsymbol{v}dV$ 来计算动量是不行的. 原因是，按照 $\boldsymbol{v}$ 的分布式(11.2)，这个积分在下述意义上发散，即虽然积分结果为有限值，但该值却和积分如何取法有关：当我们在尺度逐步趋于无限的大区域中进行积分时，得到的值取决于积分域的形状(球、柱等等). 而这里我们用来计算动量的方法，是从关系式 $\boldsymbol{u}\cdot d\boldsymbol{P}=dE$ 出发的，导出的是一个完全确定的最终结果(11.6)式. 当然，它满足动量变化率和作用于物体上的力之间的物理关系.

$\boldsymbol{F}$ 平行于物体速度的分量称为**阻力**，而垂直于物体速度的分量称为**升力**.

假如有可能由于物体在理想流体中作匀速运动而产生有势绕流，则因为 $\boldsymbol{u}=$常数，我们有 $\boldsymbol{P}=$常数，从而 $\boldsymbol{F}=0$. 这就是说，不存在阻力和升力；流体作用在物体上的压力互相抵消(这一结果称为**达朗伯佯谬**). 考察一下阻力，就能非常清楚地看出这个佯谬产生的原因. 物体在匀速运动中出现阻力，意味着为了维持运动，必须有一外力连续不断地作功. 这种功或者耗散于流体之中，或者转变成为流体的动能，结果就要在流体中造成一个流向无穷远处的连续能量流. 但是，按照定义，理想流体没有能量耗散；并且，由于物体运动而产生的流体速度，随着与物体距离的增大而迅速减小，以致不可能存在任何流向无穷远处的能量流.

然而，必须强调指明，所有这些推理仅仅适用于物体在无限体积流体中运动的情形. 例如，假使流体有自由表面，平行于表面作匀速运动的物体将承受阻力，这种阻力(称为**波阻**)的出现是因为产生了沿自由面传播的波系，它将能量连续不断地向无穷远处迁移.

假设一个物体在外力 $\boldsymbol{f}$ 作用下发生振动，当 §10 中讨论的条件完全得到满足时，物体周围的流体即作有势运动. 于是，我们可以用前面得到的关系式导出物体的运动方程. 力 $\boldsymbol{f}$ 必须等于系统总动量的时间导数，而总动量是物体动量 $M\boldsymbol{u}$ (M 是物体的质量)和流体动量 $\boldsymbol{P}$ 之和:

$$M\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}+\frac{d\boldsymbol{P}}{dt}=\boldsymbol{f}.$$

运用(11.5)式，我们就得到

$$M\frac{du_i}{dt}+m_{ik}\frac{du_k}{dt}=f_i.$$

该式也可写为

$$\frac{du_k}{dt}(M\delta_{ik}+m_{ik})=f_i. \tag{11.8}$$

这就是浸没于理想流体中的物体运动方程.

现在，我们来考虑某种意义上的反问题．假设由存在于物体之外的某种原因使流体发生振动，这种振动也将引起物体运动①．现在来推导物体的运动方程.

假设在物体线度量级的距离上，流体的速度只发生微小的变化．以 $\boldsymbol{v}$ 表示假定物体不存在时物体所处位置上流体的速度，也就是说，$\boldsymbol{v}$ 是未受扰动的流体速度．根据上面的假设，在物体占据的整个体积内，$\boldsymbol{v}$ 可假定为一常数．我们仍和以前一样，以 $\boldsymbol{u}$ 表示物体的速度.

作用于物体并使其运动的力可以用如下方法确定．如果物体完全被流体所带动(也就是如果 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}$)，则作用在物体上的力即等于假定物体不存在时作用于同一体积的液体上的力．流体这部分体积的动量是 $\rho V_0\boldsymbol{v}$．因此，作用在它上面的力就是 $\rho V_0 d\boldsymbol{v}/dt$．但实际上物体并不是完全被流体所带动，物体有相对于流体的运动，由此而来的是，流体本身也得到了某种附加的运动．这样产生的流体附加动量是 $m_{ik}(u_k-v_k)$，原因在于，现在我们必须在(11.5)式中以物体相对于流体的速度 $\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}$ 来代换 $\boldsymbol{u}$．这个动量随时间的变化，导致物体上出现一个等于 $-m_{ik}d(u_k-v_k)/dt$ 的附加作用力．因此，作用在物体上的总力为

$$\rho V_0\frac{dv_i}{dt}-m_{ik}\frac{d}{dt}(u_k-v_k).$$

这个力必须等于物体动量的时间导数．这样，我们就得到下面的运动方程

① 例如，我们可以考虑有声波传播的流体中物体的运动，声波的波长要比物体的尺寸大得多.

$$\frac{d}{dt}(Mu_i)=\rho V_0\frac{dv_i}{dt}-m_{ik}\frac{d}{dt}(u_k-v_k).$$

将方程两边对时间积分，得到

$$Mu_i=\rho V_0 v_i-m_{ik}(u_k-v_k),$$

或者写成

$$(M\delta_{ik}+m_{ik})u_k=(m_{ik}+\rho V_0\delta_{ik})v_k. \qquad (11.9)$$

这里取积分常数为零，是因为当 $\boldsymbol{v}$ 等于零时，流体引起的物体运动速度 $\boldsymbol{u}$ 必须为零．利用所得到的关系式就可以从流体的速度定出物体的速度．如果物体的密度等于流体的密度（$M=\rho V_0$），就会如所预期地得到 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{v}$.

问　　题

问题 1. 试求在理想流体中振动的球的运动方程，并求受振动流体带动的球的运动方程．

解： 将(11.1)和§10问题2中得到的绕球流动的 ϕ 表达式作对比，我们得知

$$\boldsymbol{A}=\frac{1}{2}R^3\boldsymbol{u},$$

其中 R 是球的半径．根据(11.6)式，由球传递给流体的总动量为

$$\boldsymbol{P}=\frac{2}{3}\pi\rho R^3\boldsymbol{u},$$

因此，张量 m_{ik} 是

$$m_{ik}=\frac{2}{3}\pi\rho R^3\delta_{ik}.$$

作用在运动球上的阻力是

$$\boldsymbol{F}=-\frac{2}{3}\pi\rho R^3\frac{d\boldsymbol{u}}{dt},$$

流体中振动球的运动方程便是

$$\frac{4}{3}\pi R^3\left(\rho_0+\frac{1}{2}\rho\right)\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}=\boldsymbol{f},$$

其中 ρ_0 是球的密度，$d\boldsymbol{u}/dt$ 的系数是球的虚质量，它包括球的实际质量和诱

导质量，这种情况下的诱导质量是球所排开的流体质量的一半.

如果球是受流体作用而运动，由(11.9)式，我们得到它的速度为

$$\boldsymbol{u}=\frac{3\rho}{\rho+2\rho_0}\boldsymbol{v}.$$

若球的密度大于流体的密度($\rho_0>\rho$)，则 $u<v$，即球"滞后于"流体；反之，若 $\rho_0<\rho$，球就"超前于"流体.

问题 2. 试用矢量 $\boldsymbol{A}$ 表示物体在流体中运动时所受的力矩.

解： 我们从力学中知道，作用在物体上的力矩可由它的拉格朗日函数(在现在情况下就是能量 E)确定，其关系式为 $\delta E=\boldsymbol{M}\cdot\delta\boldsymbol{\theta}$，其中 $\delta\boldsymbol{\theta}$ 是物体的无限小转动矢量，而 δE 是该转动所引起的能量变化. 对于物体转动一个角度 $\delta\theta$(相应地改变了各个分量 m_{ik})，我们可代之以流体相对于物体转动一个角度 $-\delta\theta$(相应地改变了速度 $\boldsymbol{u}$). 于是有

$$\delta\boldsymbol{u}=-\delta\boldsymbol{\theta}\times\boldsymbol{u},$$

从而

$$\delta E=\boldsymbol{P}\cdot\delta\boldsymbol{u}=-\delta\boldsymbol{\theta}\cdot(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{P}).$$

利用 $\boldsymbol{P}$ 的表达式(11.6)，就得到所要求的公式：

$$\boldsymbol{M}=-\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{P}=4\pi\rho\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{u}.$$

§ 12. 重力波

在重力场中处于平衡的液体自由面是一平面. 如果在某种外来扰动的作用下，表面的某一点离开其平衡位置，液体内将发生运动. 这种运动将以波的形式沿整个表面传播. 因为它们起因于重力场的作用，所以称为**重力波**. 重力波主要出现在液体表面上，它们也影响到液体内部；但随着深度越来越大，其影响也就越来越小.

这里我们将考虑这样的重力波，其中运动流体质点的速度如此之小，以致欧拉方程中的$(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}$ 项与 $\partial\boldsymbol{v}/\partial t$ 相比可以略去不计. 这个假设的物理意义是容易了解的. 在和波动中流体质点振动周期 τ 的量级相当的时间间隔内，质点移动了和波幅 a 的量级相当的距离. 所以，其速度的量级为 a/τ. 在 τ 量级的时间间隔

内，以及在沿着波传播方向的λ量级距离内(这里λ是波长)，速度将显著地发生变化．因此，速度的时间导数为v/τ量级，空间导数则为v/λ量级．于是条件

$$(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}\ll\partial\boldsymbol{v}/\partial t$$

等价于

$$\frac{1}{\lambda}\left(\frac{a}{\tau}\right)^2\ll\frac{a}{\tau}\cdot\frac{1}{\tau},$$

或者写为

$$a\ll\lambda, \tag{12.1}$$

即波的振幅必须远小于波长．在§9中我们已经知道，如果在运动方程中$(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}$项可以略去不计，就得到势流．假设流体不可压缩，我们就能应用方程(10.6)和(10.7)，而后一方程中的$\frac{1}{2}v^2$项是可以略去不计的，因为它包含速度的二次方．令$f(t)=0$，并计入考虑重力场作用的项ρgz，就得到

$$p=-\rho gz-\rho\frac{\partial\phi}{\partial t}. \tag{12.2}$$

通常，我们取z轴垂直向上，xy平面在流体的平衡表面上．

现在用ζ来表示表面上点的z坐标，则ζ是x，y和t的函数．平衡位置上$\zeta=0$，所以ζ是流体表面在振动时的垂直位移．设有一不变压力p_0(例如，大气压)作用在表面上，于是由(12.2)式，在表面上有

$$p_0=-\rho g\zeta-\rho\frac{\partial\phi}{\partial t}.$$

我们可以采用速度势$\phi'=\phi+(p_0/\rho)t$来代替速度势ϕ；这没有什么影响，因为$\boldsymbol{v}=\nabla\phi=\nabla\phi'$；但是，$p_0$项却从上面的方程中消去了．去掉$\phi'$中的一撇，得到流体表面上的条件为

$$g\zeta+\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_{z=\zeta}=0. \tag{12.3}$$

因为波动的振幅很小，所以位移 ζ 也很小．因此，在同样的近似程度内，我们可以认为表面上点的垂直速度分量就是 ζ 的时间导数

$$v_z=\frac{\partial\zeta}{\partial t}.$$

但是

$$v_z=\frac{\partial\phi}{\partial z},$$

所以

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)_{z=\zeta}=\frac{\partial\zeta}{\partial t}.$$

用(12.3)式的 ζ 代入，我们有

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}+\frac{1}{g}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}\right)_{z=\zeta}=0.$$

因为振动是小振幅的，括号内的式子在取值时可以用 $z=0$ 代替 $z=\zeta$. 于是我们最终得到用以确定重力场内运动的下列方程组:

$$\Delta\phi=0, \tag{12.4}$$

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}+\frac{1}{g}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}\right)_{z=0}=0. \tag{12.5}$$

我们这里将考虑流体表面上的波，这个表面是无界的；并且还将假设波长远远小于流体深度．因此，我们可以把流体看成为无限深的，从而将略去侧边和底部的边界条件．

我们来研究沿 x 轴传播而在 y 方向上均匀的重力波；在这种波内，所有的量与 y 无关．我们将寻找一个是时间和坐标 x 的简单周期函数的解，即设

$$\phi=f(z)\cos(kx-\omega t).$$

这里 ω 就是波的所谓**圆频率**（我们将简称为**频率**）；$2\pi/\omega$ 是给定点上运动的周期；k 称为**波数**；$\lambda=2\pi/k$ 是**波长**，也就是，在给定时刻沿 x 轴的运动周期.

代入方程

$$\Delta\phi=\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}=0,$$

得到

$$\frac{d^2f}{dz^2}-k^2f=0.$$

这个方程有解 e^{kz} 和 e^{-kz}. 我们必须取前一个解,因为后一个解在流体的内部将给出随深度无限增长的 ϕ(记住流体占据 $z<0$ 的区域). 因此,我们得出速度势为

$$\phi=Ae^{kz}\cos(kx-\omega t). \tag{12.6}$$

我们还要满足边界条件(12.5). 以(12.6)代入,得到

$$k-\frac{\omega^2}{g}=0,$$

或者写成

$$\omega^2=kg. \tag{12.7}$$

它给出了重力波的波数和频率之间的关系.

只要取一下 ϕ 的空间导数,就求得运动流体内的速度分布:

$$\begin{aligned}v_x&=-Ake^{kz}\sin(kx-\omega t),\\ v_z&=Ake^{kz}\cos(kx-\omega t).\end{aligned} \tag{12.8}$$

我们看出,流体中的速度随深度按指数律减小. 在空间的任何给定点上(即给定 x,z),速度矢量在 xz 平面内匀速旋转,它的大小保持不变并等于 Ake^{kz}.

我们再来确定重力波内流体质点的迹线. 暂且以 x,z 表示运动流体质点(而不是空间的固定点)的坐标,并用 x_0,z_0 表示质点在平衡位置上 x 和 z 的值. 因此

$$v_x=\frac{dx}{dt},\quad v_z=\frac{dz}{dt}.$$

因为是小振动,在(12.8)式的右边还可以近似地用 x_0, z_0 代替 x, z,于是对时间进行积分可得

$$x-x_0=-A\frac{k}{\omega}e^{kz_0}\cos(kx_0-\omega t),$$

$$z-z_0=-A\frac{k}{\omega}e^{kz_0}\sin(kx_0-\omega t). \tag{12.9}$$

所以，流体质点围绕点(x_0, z_0)画出半径为$(Ak/\omega)e^{kz_0}$的圆，这个半径随深度按指数律减小.

波的传播速度为

$$U=\frac{\partial\omega}{\partial k},$$

这将在§66中加以证明. 这里以$\omega=\sqrt{kg}$代入，就得到在无限深流体的无界表面上，重力波的传播速度为

$$U=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{k}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}. \tag{12.10}$$

它随着波长而增大.

问　　题

问题 1. 设流体深度为h，试求重力波在其无界表面上的传播速度.

解：在流体的底部，法向速度分量必须为零，即当$z=-h$时，$v_z=\partial\phi/\partial z=0$. 由这一边界条件，我们可求出在一般解

$$\phi=[Ae^{kz}+Be^{-kz}]\cos(kx-\omega t)$$

中，常数A和B的比值. 其结果是

$$\phi=A\cos(kx-\omega t)\operatorname{ch}[k(z+h)].$$

由边界条件(12.5)，我们得到k和ω之间的关系为

$$\omega^2=gk\operatorname{th}(kh).$$

波的传播速度便是

$$U=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{k\operatorname{th}(kh)}}\left[\operatorname{th}(kh)+\frac{kh}{\operatorname{ch}^2(kh)}\right].$$

对于$kh\gg1$，我们得到(12.10)的结果；而对$kh\ll1$，即得结果(13.10)(见下节).

问题 2. 设有两层流体，下层流体的密度和深度为ρ和h，上层流体的密

度和深度为 ρ' 和 h'，并且 $\rho>\rho'$. 上层流体顶部和下层流体底部都以固定水平面为边界. 试求在两层流体分界面上，重力波的频率和波长之间的关系.

解: 将 xy 平面取在两种流体平衡时的分界平面上，我们寻找在两种流体中具有下列形式的解:

$$\begin{aligned}\phi&=A\operatorname{ch}[k(z+h)]\cos(kx-\omega t),\\ \phi'&=B\operatorname{ch}[k(z-h')]\cos(kx-\omega t).\end{aligned}\tag{1}$$

这样，上边界和下边界的条件便能得到满足(参看问题 1 的解). 在分界面上，压力必须连续；按照(12.2)式，便给出以下条件:

$$\text{当 } z=\zeta \text{ 时}, \rho g\zeta+\rho\frac{\partial\phi}{\partial t}=\rho' g\zeta+\rho'\frac{\partial\phi'}{\partial t},$$

或者

$$\zeta=\frac{1}{g(\rho-\rho')}\left(\rho'\frac{\partial\phi'}{\partial t}-\rho\frac{\partial\phi}{\partial t}\right).\tag{2}$$

还有，在分界面上两种流体的速度分量 v_z 必须相同，这给出以下条件

$$\text{当 } z=0 \text{ 时}, \frac{\partial\phi}{\partial z}=\frac{\partial\phi'}{\partial z}.\tag{3}$$

现在有

$$v_z=\frac{\partial\phi}{\partial z}=\frac{\partial\zeta}{\partial t},$$

将(2)式代入，得到

$$g(\rho-\rho')\frac{\partial\phi}{\partial z}=\rho'\frac{\partial^2\phi'}{\partial t^2}-\rho\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}.\tag{4}$$

把(1)式代入(3)式和(4)式，可得出两个关于 A 和 B 的齐次线性方程，由相容条件得到

$$\omega^2=\frac{kg(\rho-\rho')}{\rho\operatorname{cth}(kh)+\rho'\operatorname{cth}(kh')}.$$

对于 $kh\gg1, kh'\gg1$ 的情况(两种流体都很深)，

$$\omega^2=kg\frac{\rho-\rho'}{\rho+\rho'},$$

而对于 $kh\ll1, kh'\ll1$(长波)，则有

$$\omega=k\sqrt{\frac{g(\rho-\rho')hh'}{\rho h'+\rho' h}}.$$

问题 3. 设有两层流体，下层流体(密度为 ρ)无限深，上层流体(密度为

ρ')深度为 h'，并有自由表面. 在两层流体的分界面和上表面同时有重力波传播，求波频和波长的关系.

解: 我们将 xy 平面取在两流体的平衡分界平面上，并寻找两流体中具有形式为

$$\begin{aligned} \phi &= Ae^{kz}\cos(kx-\omega t), \\ \phi' &= [Be^{-kz}+Ce^{kz}]\cos(kx-\omega t) \end{aligned} \tag{1}$$

的解. 在分界面上，即对于 $z=0$，有条件(参看问题 2)

$$\frac{\partial\phi}{\partial z}=\frac{\partial\phi'}{\partial z}, \quad g(\rho-\rho')\frac{\partial\phi}{\partial z}=\rho'\frac{\partial^2\phi'}{\partial t^2}-\rho\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}; \tag{2}$$

在上表面，即当 $z=h'$ 时，有条件

$$\frac{\partial\phi'}{\partial z}+\frac{1}{g}\frac{\partial^2\phi'}{\partial t^2}=0. \tag{3}$$

将方程(2)的第一式代入(1)，得出 $A=C-B$，由其余的两个条件就得到关于 B 和 C 的两个方程；从相容条件我们得到一个关于 ω^2 的二次方程，它的根是

$$\omega^2=kg\frac{(\rho-\rho')(1-e^{-2kh'})}{\rho+\rho'+(\rho-\rho')e^{-2kh'}}; \qquad \omega^2=kg.$$

当 $h'\to\infty$ 时，这些根对应于在分界面和上表面上独立地传播的波.

问题 4. 设宽为 a 长为 b 的长方池中流体深度为 h，试确定其可能的振动频率(驻波)[①].

解: 沿池的两边取 x 轴和 y 轴，我们来找一个具有以下驻波形式的解:

$$\phi=f(x,y)\,\mathrm{ch}[k(z+h)]\cos\omega t.$$

我们得到关于 f 的方程

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+k^2 f=0,$$

与问题 1 一样，从自由面的条件得出关系式

$$\omega^2=gk\,\mathrm{th}(kh).$$

取关于 f 的方程的下列形式解

$$f=\cos px\cos qy, \quad p^2+q^2=k^2.$$

在池边上必须满足条件:

$$\text{当 } x=0, a \text{ 时}, \quad v_x=\frac{\partial\phi}{\partial x}=0;$$

① 参看 § 63.

$$\text{当 } y=0,\, b \text{ 时}, \quad v_y=\frac{\partial \phi}{\partial y}=0.$$

于是我们得到

$$p=\frac{m\pi}{a}, \qquad q=\frac{n\pi}{b},$$

其中 m, n 是整数. 从而, k^2 的可能值为

$$k^2=\pi^2\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right).$$

§ 13. 重力长波

我们已经研究过波长远小于流体深度的重力波，现在来讨论相反的极限情况——波长比深度大得多的波，这些波称为**长波**.

首先考察渠道中长波的传播. 假设渠道沿着 x 轴而且长度是无限的，渠道的横截面可以为任何形状，并可以沿长度方向变化. 将渠道中流体的横截面积记为

$$S=S(x, t),$$

并假设渠道的深度和宽度都远比波长为小.

这里我们将讨论纵波，波动中的流体沿着渠道运动. 在这类波中，沿渠道的速度分量 v_x 远大于速度分量 v_y, v_z.

我们将 v_x 就写成 v 并略去小项，x 方向的欧拉方程则可写成下列形式:

$$\frac{\partial v}{\partial t}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x},$$

而 z 方向方程的形式为

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}=-g;$$

因为也假设波幅为一小量，就可以略去速度的二次项. 又由于在自由表面上($z=\zeta$)压力必须为 p_0，我们从第二个方程得出

$$p=p_0+g\rho(\zeta-z).$$

将此表达式代入第一个方程，得到

$$\frac{\partial v}{\partial t}=-g\frac{\partial \zeta}{\partial t}. \tag{13.1}$$

确定两个未知量 v 和 ζ 所需的第二个方程，可类似于连续方程那样导出；它实质上就是所论情况下的连续方程. 我们来考虑渠道中相距为 dx 的两个横断平面之间的流体体积. 单位时间内流过一个横截面的流体体积为 $(Sv)_x$，流过另一个横截面的体积为 $(Sv)_{x+dx}$. 因此，两个平面间的流体体积改变了

$$(Sv)_{x+dx}-(Sv)_x=\frac{\partial (Sv)}{\partial x}dx.$$

但是，因为流体是不可压缩的，这个变化显然必须是水位的变化所引起的. 单位时间内此二平面之间流体体积的变化是 $(\partial S/\partial t)dx$，所以，我们可以写出

$$\frac{\partial S}{\partial t}dx=-\frac{\partial (Sv)}{\partial x}dx,$$

或者

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{\partial (Sv)}{\partial x}=0. \tag{13.2}$$

这就是所需的连续方程.

设 S_0 为渠道中流体处于平衡状态时的横截面积. 于是有

$$S=S_0+S',$$

其中 S' 为波动所引起的横截面积的变化. 因为流体水位的变化很小，我们可以将 S' 写成 $b\zeta$ 的形式，其中 b 为流体表面的渠宽，于是方程(13.2)变为

$$b\frac{\partial \zeta}{\partial t}+\frac{\partial (S_0 v)}{\partial x}=0. \tag{13.3}$$

将(13.13)式对 t 微分，并将(13.1)式中的 $\partial v/\partial t$ 代入，得到

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}-\frac{g}{b}\frac{\partial}{\partial x}\left(S_0\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)=0. \tag{13.4}$$

如果在所有点上渠道的横截面相同，则 $S_0=$ 常数，从而有

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}-\frac{gS_0}{b}\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}=0. \tag{13.5}$$

此方程称为**波动方程**. 如我们在 § 63 中将要证明的，它对应着速度为U 的波的传播，而U 与频率无关，并且就是 $\partial^2\zeta/\partial x^2$ 的系数的平方根. 因此，渠道中重力长波的传播速度为

$$U=\sqrt{\frac{gS_0}{b}}. \tag{13.6}$$

用完全类似的方法，可以研究很大水池中的长波，这里假设水池在两个方向上(即 x 和 y)都是无限的. 池中流体的深度记为h. 现在速度分量 v_z 为一小量，欧拉方程成为类似于(13.1)的形式:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t}+g\frac{\partial \zeta}{\partial x}=0,\ \frac{\partial v_y}{\partial t}+g\frac{\partial \zeta}{\partial y}=0. \tag{13.7}$$

用与(13.2)相同的方法可导出连续方程，即

$$\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial (hv_x)}{\partial x}+\frac{\partial (hv_y)}{\partial y}=0.$$

我们将深度 h 写成 $h_0+\zeta$，其中 h_0 是平衡时的深度，于是得到

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t}+\frac{\partial (h_0 v_x)}{\partial x}+\frac{\partial (h_0 v_y)}{\partial y}=0. \tag{13.8}$$

现假设水池有水平的底面($h_0=$常数)，将(13.8)式对 t 微分，并用(13.7)式代换，我们得到

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}-gh\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}\right)=0. \tag{13.9}$$

这还是一个(二维)波动方程，它对应着以速度

$$U=\sqrt{gh} \tag{13.10}$$

传播的波.

§ 14. 不可压缩流体内部的波

有一种重力波，它可以在不可压缩流体内部传播，这种波是由

重力场引起的流体不均匀性产生的．压力(因而还有熵 s)必需随高度变化，所以，流体质点在高度方向上的任何位移都破坏力学平衡，并随之引起振动．因为，既然运动是绝热的，质点就把它原来的熵 s 带到新的位置，而它与新位置上的熵平衡值是不同的．

下面，我们将假设波长远远小于某种距离，在这个距离上重力场会引起密度的显著改变；同时，我们将假定流体本身是不可压缩的，这意味着我们可以略去由于波中压力变化而引起的密度变化．热膨胀引起的密度变化则不可忽略，因为正是它引起了所要讨论的现象．

我们来写出这种运动的流体动力学方程组．现使用下标0记处于力学平衡的量值，而用一撇表示对这些值的微小偏离．因此，准确到一阶小量，熵 $s=s_0+s'$ 的守恒方程可写为

$$\frac{\partial s'}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\nabla s_0=0. \tag{14.1}$$

和其它量的平衡值一样，这里 s_0 是铅垂坐标 z 的给定函数．

其次，在欧拉方程中我们仍旧略去项 $(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}$ (因为是小振动)；再考虑到平衡时的压力分布由式子

$$\nabla p_0=\rho_0\boldsymbol{g}$$

给出这一事实，保持同样的准确度，我们有

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}=-\frac{\nabla p}{\rho}+\boldsymbol{g}=-\frac{\nabla p'}{\rho_0}+\frac{\nabla p_0}{\rho^2}\rho'.$$

既然按照上面所说的，密度的变化仅仅来自熵的变化，而不是来自压力的变化，我们就可以写出

$$\rho'=\left(\frac{\partial\rho_0}{\partial s_0}\right)_p s',$$

于是得出形式为

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}=\frac{\boldsymbol{g}}{\rho_0}\left(\frac{\partial\rho_0}{\partial s_0}\right)_p s'-\nabla\left(\frac{p'}{\rho_0}\right) \tag{14.2}$$

的欧拉方程. 因为, 如上所述, 在波长数量级的距离上平衡密度的变化总是可以忽略的, 所以, 可以将 ρ_0 放进梯度算符里面. 在连续方程中同样可以假设密度不变, 于是连续方程变为

$$\nabla\cdot\boldsymbol{v}=0. \tag{14.3}$$

现在来寻找方程组(14.1)—(14.3)具有平面波形式

$$\boldsymbol{v}=\text{常矢量}\times e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}$$

的解, 对 s' 和 p' 也用类似做法. 代入连续方程(14.3)可得

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{k}=0, \tag{14.4}$$

即流体速度处处垂直于**波矢量** $\boldsymbol{k}$(横波). 方程(14.1)和(14.2)可给出

$$i\omega s'=\boldsymbol{v}\cdot\nabla s_0,\quad -i\omega\boldsymbol{v}=\frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\partial\rho_0}{\partial s_0}\right)_p s'\boldsymbol{g}-\frac{i\boldsymbol{k}}{\rho_0}p'.$$

由条件 $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{k}=0$ 和上面的第二个方程, 可得

$$ik^2p'=\left(\frac{\partial\rho_0}{\partial s_0}\right)_p s'\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{k},$$

然后, 由这两个方程消去 $\boldsymbol{v}$ 和 s', 便得到所需要的波矢量和频率之间的关系:

$$\omega^2=-\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\rho}{\partial s}\right)_p g\frac{ds}{dz}\sin^2\theta. \tag{14.5}$$

在这里和以后, 我们将省去热力学量平衡值的下标 0; 而且规定 z 轴铅垂向上, θ 是该轴与 $\boldsymbol{k}$ 方向之间的夹角. 如果(14.5)右边的表达式是正的, 就满足平衡分布 $s(z)$的稳定性条件 (不发生对流的条件——参看 § 4).

我们看出, 频率仅仅依赖于波矢量的方向而与其大小无关. 对于 $\theta=0$, 我们有 $\omega=0$; 这表明, 具有铅垂波矢量的这种类型的波是不能存在的.

如果流体同时处于力学平衡和完全的热力学平衡, 它的温度为常数, 我们可以写出

$$\frac{ds}{dz}=\left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T\frac{dp}{dz}=-\rho g\left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T.$$

最后，利用熟知的热力学关系式

$$\left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T=\frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p,\quad \left(\frac{\partial \rho}{\partial s}\right)_p=\frac{T}{c_p}\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p,$$

其中，c_p 是单位质量流体的比热，我们得出

$$\omega=\sqrt{\frac{T}{c_p}\frac{g}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p}\sin\theta. \tag{14.6}$$

特别是，对完全气体有

$$\omega=\frac{g}{\sqrt{c_pT}}\sin\theta. \tag{14.7}$$

第二章　粘 性 流 体

§15. 粘性流体的运动方程

现在来研究流体运动期间发生的能量耗散对流体运动本身的影响. 这个过程是流体运动的热力学不可逆性的结果. 这种不可逆性在某种程度上总要发生，它是由内摩擦(粘性)和导热引起的.

为了求得描述粘性流体运动的方程，必须在理想流体运动方程中附加上某些项. 关于连续方程，由其推导过程可以看出，它对任何流体，无论是粘性或非粘性流体，是同样有效的. 然而，欧拉方程需要修正.

我们在§7中已经看到，欧拉方程可写成以下形式:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i)=-\frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k},$$

这里 Π_{ik} 是动量通量密度张量. 公式(7.2)给出的动量通量代表动量的完全可逆的传递，它只不过是由不同的流体质点从一处到另一处的机械输运以及由于作用在流体中的压力引起的. 而粘性(内摩擦)则是由于动量从速度大的地方到速度小的地方的另一种不可逆传递引起的.

因此，粘性流体的运动方程就可以在"理想"动量通量(7.2)上加上一项 $-\sigma'_{ik}$ 求得，这一项给出流体中动量的不可逆"粘性"传递. 于是我们把粘性流体中动量通量密度张量写成

$$\Pi_{ik}=p\delta_{ik}+\rho v_i v_k-\sigma'_{ik}=-\sigma_{ik}+\rho v_i v_k. \tag{15.1}$$

其中张量 σ_{ik} 写成

$$\sigma_{ik}=-p\delta_{ik}+\sigma'_{ik}, \tag{15.2}$$

称为**应力张量**. 而 σ'_{ik} 称为**粘性应力张量**，它代表与运动流体质

量一起迁移的直接的动量传递无关的那部分动量通量①.

张量σ'_{ik}的一般形式可确定如下:考虑到只有当不同的流体质点以不同的速度运动,使得流体的各部分之间有相对运动时,流体中才会出现内摩擦过程,因而σ'_{ik}必定依赖于速度的空间导数.若速度梯度很小,则可假设由粘性引起的动量传递只依赖于速度的一阶导数.在同等的近似程度上,可设想σ'_{ik}为导数$\partial v_i/\partial x_k$的线性函数.$\sigma'_{ik}$中不会有与$\partial v_i/\partial x_k$无关的项,因为当$\boldsymbol{v}=$常矢量时,$\sigma'_{ik}$必须为零.其次,当整个流体作匀角速旋转时,$\sigma'_{ik}$也必须为零.因为很清楚,对这样的运动,流体中不出现内摩擦.在以角速度$\boldsymbol{\Omega}$匀速旋转时,速度$\boldsymbol{v}$等于矢积$\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}$.和式

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\frac{\partial v_k}{\partial x_i}$$

是导数$\partial v_i/\partial x_k$的线性组合,并且当$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}$时,它为零.因而,$\sigma'_{ik}$一定只包含导数$\partial v_i/\partial x_k$的这类对称的组合.

满足以上条件的最一般的二阶张量是

$$\sigma'_{ik}=a\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)+b\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\delta_{ik}.$$

这里a和b与速度无关②.但是,把这个式子写成稍微不同的形式,用其它常数代替a和b更为适宜:即写成

$$\sigma'_{ik}=\eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\frac{\partial v_k}{\partial x_i}-\frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\right)+\zeta\delta_{ik}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}, \tag{15.3}$$

括号内的式子有这样的性质,即对i和k进行缩并时该式为零.常数η和ζ称为**粘性系数**.§16和§49中将证明,这二个数都是

① 下面我们将看到,σ'_{ik}包含与δ_{ik}成正比的一项,即与$p\delta_{ik}$项形式相同的项.因此,当动量通量张量表成这种形式时,我们应当详细说明压力p是什么意思,见§49最后部分.

② 我们这样说是利用了流体各向同性这一事实,由于各向同性,流体的一些特性必定只用标量描述(这种情况下就是a和b).

正的:

$$\eta>0, \qquad \zeta>0. \tag{15.4}$$

现在,只要把$\frac{\partial \sigma'_{ik}}{\partial x_k}$加到欧拉方程

$$\rho\left(\frac{\partial v_i}{\partial t}+v_k\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x_i}$$

的右边,即可得到粘性流体的运动方程. 于是我们有

$$\rho\left(\frac{\partial v_i}{\partial t}+v_k\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x_i}+\frac{\partial}{\partial x_k}\left[\eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\partial v_k}{\partial x_i}-\frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\zeta\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\right). \tag{15.5}$$

这是粘性流体运动方程最一般的形式. 量 η 和 ζ 是压力和温度的函数. 一般说来, p 和 T, 因而 η 和 ζ, 并不是在整个流体内部保持为常数, 所以 η 和 ζ 不能移到梯度算符的外面.

但是在大多数情况下,流体中的粘性系数变化不大,可当作是常数,因而有

$$\frac{\partial \sigma'_{ik}}{\partial x_k}=\eta\left(\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k\partial x_k}+\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial v_k}{\partial x_k}-\frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\right)+$$

$$+\zeta\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}$$

$$=\eta\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k\partial x_k}+\left(\zeta+\frac{1}{3}\eta\right)\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}.$$

但

$$\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\equiv\nabla\cdot\boldsymbol{v}, \quad \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k\partial x_k}\equiv\Delta v_i.$$

于是我们可以把粘性流体的运动方程写成矢量形式,

$$\rho\left[\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}\right]=-\nabla p-\eta\Delta\boldsymbol{v}+\left(\zeta+\frac{1}{3}\eta\right)\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{v}). \tag{15.6}$$

若流体可看作是不可压缩的，则 $\nabla\cdot \boldsymbol{v}=0$，即(15.6)右边的最后一项为零．因而不可压缩粘性流体的运动方程为

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}=-\frac{1}{\rho}\nabla p+\frac{\eta}{\rho}\Delta\boldsymbol{v}, \tag{15.7}$$

此方程称为**纳维-斯托克斯（Navier-Stokes）方程**．不可压缩流体中，应力张量取下面的简单形式

$$\sigma_{ik}=-p\delta_{ik}+\eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right). \tag{15.8}$$

我们看到，不可压缩流体的粘性只由一个系数确定．因为大多数流体实际上都可当作是不可压缩的，所以这个粘性系数 η 是有普遍重要性的．比值

$$\nu=\frac{\eta}{\rho} \tag{15.9}$$

称为**运动粘性系数**(而 η 本身称为**动力粘性系数**)．下面我们给出 20°C 温度下，各种流体的 η 和 ν 的值：

	$\eta\left(\frac{克}{厘米\cdot秒}\right)$	$\nu\left(\frac{厘米^2}{秒}\right)$
水	0.010	0.010
空　气	0.00018	0.150
酒　精	0.018	0.022
甘　油	8.5	6.8
汞	0.0156	0.0012

可以指出，在给定的温度下，气体的动力粘性系数与压力无关；但运动粘性系数与压力成反比．

如同从欧拉方程中消去压力那样，可以从纳维-斯托克斯方程中消去压力．对方程(15.7)的两边取旋度，我们得到的不是理想流体的方程(2.11)，而是方程

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\boldsymbol{v})=\nabla\times[\boldsymbol{v}\times(\nabla\times\boldsymbol{v})]+\nu\Delta(\nabla\times\boldsymbol{v}).$$

(15.10)

我们还必须写出关于粘性流体运动方程的边界条件. 在粘性流体和固体表面之间总存在着分子引力，这些力使紧贴固体表面的流体层完全静止，并且"粘附"于表面上. 因此，粘性流体运动方程的边界条件要求在静止的固体表面上，流体速度应为零，即

$$\boldsymbol{v}=0. \tag{15.11}$$

应当着重指出，法向和切向速度分量都必须为零，而对于理想流体，边界条件只要求 v_n 为零①.

在运动物体的一般情况下，速度 $\boldsymbol{v}$ 必须等于物体表面的速度.

我们不难写出周围流体作用于固体表面的力的表达式. 一个面元上所受的作用力恰等于通过这个面元的动量通量. 通过面元 $d\boldsymbol{f}$ 的动量通量是

$$\Pi_{ik}df_k=(\rho v_i v_k-\sigma_{ik})df_k.$$

把 df_k 写成 $df_k=n_k df$ 的形式，这里 $\boldsymbol{n}$ 是沿法向的单位矢量，并考虑到在固体表面上 $\boldsymbol{v}=0$②，我们得到作用在单位面积上的力 $\boldsymbol{p}$ 为

$$p_i=-\sigma_{ik}n_k=pn_i-\sigma'_{ik}n_k. \tag{15.12}$$

其中等式右边第一项是普通的流体压力，而第二项是由于粘性引起的作用在固体表面上的摩擦力. 应强调指出，式(15.12)中的 $\boldsymbol{n}$ 是单位矢量，它沿流体界面的外法线，即沿固体表面的内法线.

若有不相混合的两种流体的分界面，则分界面上的条件是两种流体的速度必须相等，且相互间的作用力一定大小相等方向相反. 后一个条件写成

---

① 注意，一般说来，欧拉方程不能和边界条件 $\boldsymbol{v}=0$ 同时得到满足.

② 在确定固体表面上所受的作用力时，必须把每个面元放在这样的坐标系中研究：在该坐标系中，此面元处于静止. 只有在表面静止的情况下，力才等于动量通量.

$$n_{1,k}\sigma_{1,ik}+n_{2,k}\sigma_{2,ik}=0,$$

这里下标 1 和 2 分别指两种流体. 法向矢量 $\boldsymbol{n}_1$ 和 $\boldsymbol{n}_2$ 方向相反, 即 $n_{1,i}=-n_{2,i}=n_i$, 所以我们可以写成

$$n_i\sigma_{1,ik}=n_i\sigma_{2,ik}. \tag{15.13}$$

在流体的自由面上, 必须满足条件

$$\sigma_{ik}n_k\equiv\sigma'_{ik}n_k-pn_i=0. \tag{15.14}$$

为今后参考, 下面我们给出柱坐标和球坐标中应力张量分量的表达式和纳维-斯托克斯方程. 在柱坐标 r, ϕ, z 中应力张量的分量是

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr}&=-p+2\eta\frac{\partial v_r}{\partial r},\\
\sigma_{\phi\phi}&=-p+2\eta\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi}+\frac{v_r}{r}\right),\\
\sigma_{zz}&=-p+2\eta\frac{\partial v_z}{\partial z},\\
\sigma_{r\phi}&=\eta\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\phi}+\frac{\partial v_\phi}{\partial r}-\frac{v_\phi}{r}\right),\\
\sigma_{\phi z}&=\eta\left(\frac{\partial v_\phi}{\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial\phi}\right),\\
\sigma_{zr}&=\eta\left(\frac{\partial v_z}{\partial r}+\frac{\partial v_r}{\partial z}\right).
\end{aligned} \tag{15.15}$$

纳维-斯托克斯方程的三个分量方程和连续方程为

$$\frac{\partial v_r}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{v_\phi}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\phi}+v_z\frac{\partial v_r}{\partial z}-\frac{v_\phi^2}{r}$$

$$=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}+\nu\left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_r}{\partial\phi^2}+\frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial r}-\right.$$

$$\left.-\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi}-\frac{v_r}{r^2}\right),$$

$$\frac{\partial v_\phi}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_\phi}{\partial r}+\frac{v_\phi}{r}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi}+v_z\frac{\partial v_\phi}{\partial z}+\frac{v_rv_\phi}{r}$$

$$=-\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial \phi}+\nu\left(\frac{\partial^2 v_\phi}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_\phi}{\partial \phi^2}+\frac{\partial^2 v_\phi}{\partial z^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_\phi}{\partial r}+\right.$$

$$\left.+\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \phi}-\frac{v_\phi}{r^2}\right), \tag{15.16}$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_z}{\partial r}+\frac{v_\phi}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \phi}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}$$

$$=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+\nu\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_z}{\partial \phi^2}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial r}\right),$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}+\frac{\partial v_z}{\partial z}+\frac{v_r}{r}=0.$$

在球坐标 r, ϕ, θ 中，应力张量分量是

$$\sigma_{rr}=-p+2\eta\frac{\partial v_r}{\partial r},$$

$$\sigma_{\phi\phi}=-p+2\eta\left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}+\frac{v_r}{r}+\frac{v_\theta \operatorname{ctg}\theta}{r}\right),$$

$$\sigma_{\theta\theta}=-p+2\eta\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}+\frac{v_r}{r}\right), \tag{15.17}$$

$$\sigma_{r\theta}=\eta\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}+\frac{\partial v_\theta}{\partial r}-\frac{v_\theta}{r}\right),$$

$$\sigma_{\theta\phi}=\eta\left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial \phi}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_\phi}{\partial \theta}-\frac{v_\phi \operatorname{ctg}\theta}{r}\right),$$

$$\sigma_{\phi r}=\eta\left(\frac{\partial v_\phi}{\partial r}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial \phi}-\frac{v_\phi}{r}\right),$$

而运动方程为

$$\frac{\partial v_r}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}+\frac{v_\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial \phi}-\frac{v_\theta^2+v_\phi^2}{r}$$

$$=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}+\nu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial^2(rv_r)}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2}+\right.$$

$$+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 v_r}{\partial \phi^2}+\frac{\operatorname{ctg}\theta}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}-$$

$$\left.-\frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}-\frac{2v_r}{r^2}-\frac{2\operatorname{ctg}\theta}{r^2}v_\theta\right],$$

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}+\frac{v_\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial \phi}+\frac{v_r v_\theta}{r}-\frac{v_\phi^2\operatorname{ctg}\theta}{r}$$

$$=-\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial \theta}+\nu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial^2(r v_\theta)}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2}+\right.$$

$$+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \phi^2}+\frac{\operatorname{ctg}\theta}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}-$$

$$\left.-\frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}-\frac{v_\theta}{r^2\sin^2\theta}\right], \tag{15. 18}$$

$$\frac{\partial v_\phi}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_\phi}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\phi}{\partial \theta}+\frac{v_\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}+\frac{v_r v_\phi}{r}+\frac{v_\theta v_\phi\operatorname{ctg}\theta}{r}$$

$$=-\frac{1}{\rho r\sin\theta}\frac{\partial p}{\partial \phi}+\nu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial^2(r v_\phi)}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_\phi}{\partial \theta^2}+\right.$$

$$+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 v_\phi}{\partial \phi^2}+\frac{\operatorname{ctg}\theta}{r^2}\frac{\partial v_\phi}{\partial \theta}+$$

$$\left.+\frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial \phi}+\frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial \phi}-\frac{v_\phi}{r^2\sin^2\theta}\right],$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}+\frac{2v_r}{r}+\frac{v_\theta\operatorname{ctg}\theta}{r}=0.$$

最后，我们给出不可压缩粘性流体二维流动中流函数 $\psi(x,y)$ 所必须满足的方程. 把

$$v_x=\frac{\partial\psi}{\partial y},\ v_y=-\frac{\partial\psi}{\partial x},\ v_z=0$$

代入方程(15. 10)，即得这个方程为

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta\psi)-\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial(\Delta\psi)}{\partial y}+\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial(\Delta\psi)}{\partial x}-\nu\Delta^2\psi=0\ . \tag{15. 19}$$

§ 16. 不可压缩流体中的能量耗散

粘性的存在导致能量的耗散，最终转变为热. 对不可压缩流

体，计算能量耗散是特别简单的。

不可压缩流体的总动能是

$$E_{动}=\frac{1}{2}\rho\int v^2 dV,$$

我们取这个能量的时间导数，写出

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho v^2\right)=\rho v_i\frac{\partial v_i}{\partial t},$$

并用纳维-斯托克斯方程所给的表达式

$$\frac{\partial v_i}{\partial t}=-v_k\frac{\partial v_i}{\partial x_k}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial \sigma'_{ik}}{\partial x_k}$$

代换上式中的 $\partial v_i/\partial t$，结果是

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho v^2\right)=-\rho \boldsymbol{v}\cdot(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}\cdot\nabla p+v_i\frac{\partial \sigma'_{ik}}{\partial x_k}$$

$$=-\rho(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\left(\frac{1}{2}v^2+\frac{p}{\rho}\right)+\nabla\cdot(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\sigma}')-\sigma'_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k}.$$

其中 $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\sigma}'$ 表示分量为 $v_i\sigma'_{ik}$ 的矢量．因为对不可压缩流体有

$$\nabla\cdot\boldsymbol{v}=0,$$

我们可把右边的第一项写成散度的形式：

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho v^2\right)=-\nabla\cdot\left[\rho\boldsymbol{v}\left(\frac{1}{2}v^2+\frac{p}{\rho}\right)-\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\sigma}'\right]-\sigma'_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k}. \tag{16.1}$$

方括号内的式子就是流体中的能量通量密度．第一项 $\rho\boldsymbol{v}\left(\frac{1}{2}v^2+\frac{p}{\rho}\right)$是由于流体质量在实际上有传递而引起的能量通量，并且与理想流体中的能量通量相同(见(10.5))．第二项 $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\sigma}'$ 是由于内摩擦过程引起的能量通量．因为粘性的存在引起了动量通量 σ'_{ik}；但是动量的传递总是包含着能量的传递，并且能量通量显然等于动量通量与速度的标积．

若在某个体积 V 上对(16.1)积分，我们得

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\frac{1}{2}\rho v^2 dV=-\oint\left[\rho\boldsymbol{v}\left(\frac{1}{2}v^2+\frac{p}{\rho}\right)-\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\sigma}'\right]\cdot d\boldsymbol{f}$$

$$-\int\sigma'_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k}dV\ . \tag{16.2}$$

右边第一项给出体积V中流体动能的变化率，这个变化率是由于通过体积V的界面的能量通量引起的. 因此第二项积分就是单位时间内由耗散引起的动能减少.

若将积分扩展到流体的整个区域,则面积分为零(因为在无穷远处速度为零①)，于是我们得整个流体中单位时间所耗散的能量是

$$\dot{E}_{动}=-\int\sigma'_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k}dV\ .$$

在不可压缩流体中,张量 σ'_{ik} 由(15.8)给出,所以

$$\sigma'_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k}=\eta\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right).$$

容易证明,这个式子可写成

$$\frac{1}{2}\eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)^2.$$

因而,我们最后得出不可压缩流体中的能量耗散率为

$$\dot{E}_{动}=-\frac{1}{2}\eta\int\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)^2 dV\ . \tag{16.3}$$

耗散导致机械能的减少，即一定有 $\dot{E}_{动}<0$. 但(16.3)中的积分总是正的. 所以我们断定粘性系数 η 总是正的.

问　　题

对于势流,试把积分(16.3)变换成在该流动区域界面上的积分.

---

① 我们考虑的是这样一种坐标系中流体的运动：在此坐标系中,无穷远处流体是静止的. 在这里以及其它的类似情形中,为明确起见,我们提出无限大流体体积的说法,但这并不失去一般性. 对于充满在有限容积中的流体,这个面积分也为零,因为表面上的法向速度分量为零.

解: 令 $\partial v_i/2x_k=\partial v_k/\partial x_i$, 并用分部积分法积分一次, 我们得

$$\dot{E}_{动}=-2\eta\int\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\right)^2 dV=-2\eta\oint v_i\frac{\partial v_i}{\partial x_k}df_k.$$

或
$$\dot{E}_{动}=-\eta\oint\nabla(v^2)\cdot d\boldsymbol{f}.$$

§17. 管道中的流动

现在我们来讨论不可压缩粘性流体运动的一些简单问题.

设流体介于两个平行平板之间, 一个平板相对于另一平板以等速 $\boldsymbol{u}$ 运动. 我们取其中一个平板为 xz 平面, x 轴指向 $\boldsymbol{u}$ 方向. 很清楚, 所有的量只依赖于 y, 并且各处的流体速度都指向 x 方向. 对于定常流, 由(15.7)我们得

$$dp/dy=0,\qquad d^2v/dy^2=0.$$

(连续方程自然满足). 因此, $p=$常数, $v=ay+b$. 对 $y=0$ 和 $y=h$(h 是面板间距离), 必须分别有 $v=0$ 和 $v=u$. 于是

$$v=yu/h \tag{17.1}$$

所以流速分布是线性的. 平均流速可定义为

$$\bar{v}=\frac{1}{h}\int_0^h v\,dy,$$

就是

$$\bar{v}=\frac{1}{2}u. \tag{17.2}$$

由(15.12)求得作用在每块平板上的力的垂直分量就是 P, 这是理所当然的; 而作用在 $y=0$ 平板上的切向摩擦力是

$$\sigma_{xy}=\eta dv/dy=\eta u/h; \tag{17.3}$$

作用在 $y=h$ 平板上的切向摩擦力是 $-\eta u/h$.

其次, 我们来讨论有压力梯度的情况下, 在两个固定的平行板之间的定常流. 我们选择和前面一样的坐标系; x 轴指向流体运动方向. 因为速度显然只依赖于 y, 所以纳维-斯托克斯方程

给出:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=\frac{1}{\eta}\frac{\partial p}{\partial x}, \qquad \frac{\partial p}{\partial y}=0.$$

第二个方程表明,压力与 y 无关,即沿 y 轴穿过两板间的流体时,压力是常数. 因而第一个方程的右边只是 x 的函数,而左边只是 y 的函数;这只有当两边均为常数时才能成立. 因而 $dp/dx=$常数,即沿流动方向,压力是坐标 x 的线性函数. 我们现在得速度

$$v=\frac{1}{2\eta}\frac{dp}{dx}y^2+ay+b.$$

常数 a 和 b 由 $y=0$ 和 $y=h$ 处 $v=0$ 的边界条件确定. 结果得

$$v=-\frac{1}{2\eta}\frac{dp}{dx}\left[\frac{1}{4}h^2-\left(y-\frac{1}{2}h\right)^2\right]. \qquad (17.4)$$

所以沿 y 轴方向,流体速度按抛物线变化,在中点达到最大值. 平均流速(对整个流体厚度平均)还是

$$\bar{v}=\frac{1}{h}\int_0^h v\,dy;$$

计算后求得

$$\bar{v}=-\frac{h^2}{12\eta}\frac{dp}{dx}. \qquad (17.5)$$

我们还可计算作用在一块固定平板上的摩擦力 $\sigma_{xy}=\eta(\partial v/\partial y)_{y=0}$. 将(17.4)代入,得

$$\sigma_{xy}=-\frac{h}{2}\frac{dp}{dx}. \qquad (17.6)$$

最后,我们来研究管道中的定常流,管道的横截面是任意的,但沿管道全长上的横截面都相同. 我们取管轴为 x 轴. 显然,每一点的流体速度都指向 x 轴方向,且仅仅是 y 和 z 的函数. 连续方程自然满足,而纳维-斯托克斯方程的 y 和 z 分量方程又给出 $\partial p/\partial y=\partial p/\partial z=0$,即在管道的整个横截面上,压力是常数. 方程(15.7)的 x 分量方程给出

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}=\frac{1}{\eta}\frac{dp}{dx}. \tag{17.7}$$

于是我们又得出结论, $dp/dx=$常数; 所以压力梯度可写成$-\Delta p/l$, 这里 Δp 是管道两端的压差, 而 l 是它的长度.

这样, 管内流动的速度分布由 $\Delta v=$常数形式的二维方程确定. 这个方程必须在管道横截面的周线上 $v=0$ 的边界条件下求解. 我们将对圆截面管道来解这个方程. 把原点取在圆心, 并利用极坐标, 由对称性得 $v=v(r)$. 利用极坐标中拉普拉斯算子的表达式, 我们有

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv}{dr}\right)=-\frac{\Delta p}{\eta l}.$$

积分后, 得

$$v=-\frac{\Delta p}{4\eta l}r^2+a\ln r+b. \tag{17.8}$$

由于在管道中心处速度必须是有限值, 所以必须令常数 a 等于零. 常数 b 由 $r=R$ 处 $v=0$ 的条件确定, 这里 R 是管道半径. 于是我们求得

$$v=\frac{\Delta p}{4\eta l}(R^2-r^2). \tag{17.9}$$

所以横截面上的速度分布是抛物型的.

很容易确定每秒通过管道任一截面的流体质量 Q(称为**流量**). 每秒通过截面上环形面元 $2\pi r dr$ 的质量为 $\rho\cdot 2\pi r v dr$, 因而

$$Q=2\pi\rho\int_0^R r v dr.$$

利用(17.9)得

$$Q=\frac{\pi\Delta p}{8\nu l}R^4. \tag{17.10}$$

所以, 流量正比于管径的四次方(**泊肃叶公式**).

问　　题

问题 1. 设有环形截面管道，其内、外半径为 R_1, R_2，试确定该管道内的流动.

解: 根据 $r=R_1$ 和 $r=R_2$ 处 $v=0$ 的条件，由通解(17.8)确定出常数 a 和 b，我们得

$$v=\frac{\Delta p}{4\eta l}\left[R_2^2-r^2+\frac{R_2^2-R_1^2}{\ln(R_2/R_1)}\ln\frac{r}{R_2}\right].$$

流量是

$$Q=\frac{\pi\Delta p}{8\nu l}\left[R_2^4-R_1^4-\frac{(R_2^2-R_1^2)^2}{\ln(R_2/R_1)}\right].$$

问题 2. 试确定椭圆截面管道中的流动.

解: 我们求方程(17.7)的形式为 $v=Ay^2+Bz^2+C$ 的解. 常数 A, B, C 按以下要求确定: 即这个解式必须满足在椭圆周线上 $v=0$ 的边界条件,(即 $Ay^2+Bz^2+C=0$ 必须与方程 $y^2/a^2+z^2/b^2=1$ 相同,其中 a 和 b 是椭圆的半轴.) 结果为

$$v=\frac{\Delta p}{2\eta l}\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}\left(1-\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}\right).$$

流量是

$$Q=\frac{\pi\Delta p}{4\nu l}\frac{a^3b^3}{a^2+b^2}.$$

问题 3. 设有横截面为等边三角形的管道，三角形的边长为 a，试确定该管道内的流动.

解: 在满足三角形周线上速度为零的条件下,方程(17.7)的解是

$$v=\frac{\Delta p}{l}\frac{2}{\sqrt{3}\,a\eta}h_1h_2h_3,$$

其中 h_1, h_2, h_3 是由三角形中给定点到三个边的垂线的长度. 表达式 Δh_1, Δh_2, Δh_3 均为零$\left(\text{其中 }\Delta=\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)$. 这是很容易看出的,因垂线 h_1, h_2, h_3 中的每一条都可取作 y 轴或 z 轴，而将拉普拉斯算子使用于坐标的结果是零. 所以我们有

$$\Delta(h_1h_2h_3)=2(h_1\nabla h_2\cdot\nabla h_3+h_2\nabla h_3\cdot\nabla h_1+h_3\nabla h_1\cdot\nabla h_2).$$

但 $\nabla h_1=\mathbf{n}_1$, $\nabla h_2=\mathbf{n}_2$, $\nabla h_3=\mathbf{n}_3$, 这里 $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$, $\mathbf{n}_3$ 是沿着垂线 h_1, h_2, h_3 的单位矢

量. 因为 $\boldsymbol{n}_1$, $\boldsymbol{n}_2$, $\boldsymbol{n}_3$ 中任意两个的夹角都是 $2\pi/3$, 所以 $\nabla h_1\cdot\nabla h_2=\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2=\cos(2\pi/3)=-\frac{1}{2}$, 如此等等. 于是我们得关系式

$$\nabla(h_1h_2h_3)=-(h_1+h_2+h_3)=-\frac{\sqrt{3}}{2}a,$$

因此我们看出, 方程(17.7)得到满足. 流量是

$$Q=\frac{\sqrt{3}\,a^4\Delta p}{320\nu l}.$$

问题 4. 设半径为 R_1 的柱面以速度 u 在半径为 R_2 的同轴柱面内运动, 试确定两柱面间流体的运动.

解: 我们取柱坐标, 其 z 轴沿柱面的轴线. 速度处处沿着 z 轴方向, 且只依赖于 r (像压力一样), 即

$$v_z=v(r).$$

我们得 v 的方程

$$\Delta v=\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv}{dr}\right)=0;$$

项 $(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}=v\partial v/\partial z$ 恒等于零. 利用 $r=R_1$ 处 $v=u$ 和 $r=R_2$ 处 $v=0$ 的边界条件, 得

$$v=u\frac{\ln(r/R_2)}{\ln(R_1/R_2)}.$$

每个柱面单位长度上的摩擦力都是 $2\pi\eta u/\ln(R_2/R_1)$.

问题 5. 设有一厚度为 h 的流体层, 上边界是自由面, 下边界是固定平面, 它与水平面的夹角为 α. 试确定在重力作用下该流体层的流动.

解: 取固定平面为 xy 面, 其 x 轴指向流动方向(图 6). 我们求只依赖于 z 的解. 在重力场中对于 $v_x=v(z)$ 的纳维-斯托克斯方程是

$$\eta\frac{d^2v}{dz^2}+\rho g\sin\alpha=0,$$

$$\frac{dp}{dz}+\rho g\cos\alpha=0.$$

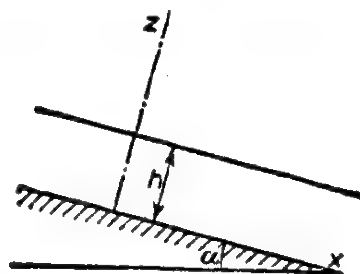


图 6

在自由面上 $(z=h)$, 应有 $\sigma_{xz}=\eta dv/dz=0$, $\sigma_{zz}=-p=-p_0$ (p_0 是大气压力). 在 $z=0$ 处应有 $v=0$. 满足这些条件的解是

$$p = p_0 + \rho g(h-z)\cos\alpha,$$

$$v = \frac{\rho g \sin\alpha}{2\eta} z(2h-z).$$

y 方向单位长度的流量为

$$Q = \rho \int_0^h v dz = \frac{\rho g h^3 \sin\alpha}{3\nu}.$$

问题 6. 试确定粘性完全气体沿圆截面管道等温流动的压力降(记住,完全气体的动力粘性系数 η 与压力无关).

解: 在任何一段很短的管道内,假如压力梯度不是太大,可以认为气体是不可压缩的,因此,可用式(17.10),由此得

$$-\frac{dp}{dx} = \frac{8\eta Q}{\pi\rho R^4}.$$

但通过较大的距离,ρ 要发生变化,于是压力不是 x 的线性函数. 根据状态方程,气体密度 $\rho = mp/kT$,这里 m 是一个分子的质量,k 是玻耳兹曼常数. 所以

$$-\frac{dp}{dx} = \frac{8\eta QkT}{\pi m R^4} \cdot \frac{1}{p}.$$

(显然,无论气体是否为不可压缩的,气体通过管道的流量 Q 都相同). 由此可得

$$p_2^2 - p_1^2 = \frac{16\eta QkT}{\pi m R^4} l.$$

其中 p_2、p_1 是长度为 l 的管道两端的压力.

§18. 两个旋转圆柱面之间的流动

现在我们来研究两个无限长同轴圆柱面之间流体的运动,柱面的半径分别为 R_1、$R_2(R_2>R_1)$,并分别以角速度 Ω_1,Ω_2 绕其轴旋转. 我们取柱坐标 r、ϕ、z,其 z 轴沿着柱面的轴线. 由对称性,显然有

$$v_z = v_r = 0,\ v_\phi = v(r),\ p = p(r).$$

在这种情况下,柱坐标中的纳维-斯托克斯方程给出两个方程:

$$\frac{dp}{dr} = \frac{\rho v^2}{r}, \qquad (18.1)$$

$$\frac{d^2v}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dv}{dr}-\frac{v}{r^2}=0. \tag{18.2}$$

后一方程有 r^n 形式的解，将它代入方程得 $n=\pm1$，所以

$$v=ar+b/r,$$

常数 a 和 b 由边界条件确定，即根据边界条件，内外柱面上的流速必须等于对应的柱面本身的速度：在 $r=R_1$ 处，$v=R_1\Omega_1$，在 $r=R_2$ 处，$v=R_2\Omega_2$. 结果我们求得速度分布为

$$v=\frac{\Omega_2R_2^2-\Omega_1R_1^2}{R_2^2-R_1^2}r+\frac{(\Omega_1-\Omega_2)R_1^2R_2^2}{R_2^2-R_1^2}\frac{1}{r}. \tag{18.3}$$

于是，压力分布可由式(18.1)直接积分求得.

对于 $\Omega_1=\Omega_2=\Omega$ 的情形，我们就有 $v=\Omega r$，即流体随柱面刚性地旋转. 当不存在外柱面时($\Omega_2=0$, $R_2=\infty$)，得 $v=\Omega_1R_1^2/r$.

我们再来确定作用在柱面上的摩擦力矩. 作用在内柱面单位面积上的摩擦力，沿着柱面的切线方向，且由式(15.12)知，它等于应力张量的分量 $\sigma'_{r\phi}$. 利用公式(15.15)得

$$[\sigma'_{r\phi}]_{r=R_1}=\eta\left[\left(\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{v}{r}\right)\right]_{r=R_1}$$

$$=-2\eta\frac{(\Omega_1-\Omega_2)R_2^2}{R_2^2-R_1^2}.$$

再乘以 $2\pi R_1$，即得作用在单位长度柱面上的力，把上述结果再乘以 R_1 即得力矩 M_1. 于是有

$$M_1=\frac{4\pi\eta(\Omega_1-\Omega_2)R_1^2R_2^2}{R_2^2-R_1^2}. \tag{18.4}$$

作用在外柱面上的力矩 M_2 显然是 $-M_1$①.

关于§17和§18中已求得的粘性流体运动方程的解，可作以

① 对于两个圆柱面的轴平行而不重合，有粘性流体在这两个圆柱面之间狭窄区域内运动的情形，这种更复杂问题的解可参看 Н. Е. Кочин, И. А. Кибель, Н. В. Розе, *Теоретическая Гидромеханика*, Ч. 2, 419, Гостехиздат(1948); A. Sommerfeld, *Mechanics of Deformable Bodies*, § 36, Academic Press, New York(1950).

下一般性的说明. 在所有这些情况下, 凡用来确定速度分布的方程中的非线性项$(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}$都恒等于零, 所以我们实际上是解线性方程,这就使问题简单得多. 由于这个原因,这些解也全都满足不可压缩理想流体的运动方程,比如(10.2)和(10.3)形式的方程. 这就是公式(17.1)和(18.3)全都不包含粘性系数的原因. 因为压力梯度是由粘性所引起的, 所以粘性系数只出现在象(17.9)这样的公式中,这些式子把流体中的速度和压力梯度联系起来;对理想流体,即使没有压力梯度,它也能在管道内流动.

§19. 相似律

在研究粘性流体运动时, 通过对各种物理量的量纲作简单分析,可以获得一些重要结果. 我们来考虑任一特定类型的运动,例如某个确定形状的物体通过流体的运动. 假如物体不是球体, 还必须指出它的运动方向, 例如椭球是沿最长轴还是最短轴方向运动. 或者,换个提法, 我们来考虑流体在边界形状确定的区域(如给定截面形状的管道等)中流动.

在这种情况下,我们就说形状相同的物体是**几何相似的**:即这些物体相互之间, 可按同一比例改变其中一个物体的所有线度而得到另一个. 因此,假如物体的形状是给定的,只要指出其中任何一个线度(如球体或圆管的半径, 偏心率已知的椭球的一个半轴等),就足以确定其全部尺寸.

现在,我们将考虑定常流. 例如, 若讨论绕固体的流动(为确定起见,下面我们将讨论这种情况), 则来流速度应为常数. 我们还假设流体是不可压缩的.

在流体动力学方程组 (纳维-斯托克斯方程组)里, 就表征流体本身特性的参数而言, 只出现运动粘性系数$\nu=\eta/\rho$. 还有,求解这个方程组所必须确定的未知函数是速度v和p/ρ, 这里p/ρ

是压力 p 与不变密度 ρ 的比值. 再者，流动依赖于在流体中运动的物体的形状、尺寸以及它的速度. 这些都作为边界条件制约流动. 由于物体形状假定是已知的，它的几何特性可由一个线度加以确定，现用 l 表示这个线度. 设来流速度为 u. 于是任何流动都是由 ν, u 和 l 这三个参数确定. 这些量的量纲如下:

$$\nu=[\text{厘米}^2]/[\text{秒}],\ l=[\text{厘米}],\ u=[\text{厘米}]/[\text{秒}]$$

容易证明，由以上三个量只能构成一个无量纲量，即 ul/ν. 这个组合称为**雷诺数**，并用 R 表示:

$$R=\rho ul/\eta=ul/\nu, \tag{19.1}$$

任何其它的无量纲参数都可写成 R 的函数.

现在我们就用 l 和 u 来分别量度长度和速度，也就是说，可引进无量纲变量 $\boldsymbol{r}/l$ 和 $\boldsymbol{v}/u$. 因为唯一的无量纲参数是雷诺数，显然解不可压缩流方程组所得的速度分布由

$$\boldsymbol{v}=u\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}/l, R) \tag{19.2}$$

形式的函数给出. 由此式看出，在同一类型的两个不同流动中(例如不同粘性的流体绕不同半径球体流动)，若它们的雷诺数相同，则速度 $\boldsymbol{v}/u$ 与比值 $\boldsymbol{r}/l$ 的函数关系是相同的. 凡只要改变坐标和速度的量度单位，就可从一个流动得出另一个流动，我们就称这些流动是**相似的**. 因而具有相同雷诺数的同类流动是相似的. 这就叫做**相似律**(雷诺 1883).

类似于(19.2)，可以写出流体中的压力分布公式. 为此，我们必须由参数 ν, l 和 u 作出某个量纲为压力除以密度的量，比如，这个量可以是 u^2. 于是我们可以说，$p/\rho u^2$ 是无量纲变量 $\boldsymbol{r}/l$ 和无量纲参数 R 的函数. 所以

$$p=\rho u^2 f(\boldsymbol{r}/l, R). \tag{19.3}$$

最后，类似的考虑也可适用于这样一些量：它们描写流动的特性，但不是坐标的函数. 例如作用在物体上的阻力 F 就是这样一

个量．我们可以说：阻力 F 与用 ν, u, l, ρ 组成的并具有力的量纲的某个量之比必定只是雷诺数的函数．比如，ν, u, l, ρ 组合成力的量纲可以是 $\rho u^2 l^2$．因而

$$F=\rho u^2 l^2 f(R). \tag{19.4}$$

若重力对流动有重要作用，则流动不是由三个参数确定，而是由 l, u, ν 和重力加速度 g 这四个参数确定．由这四个参数可构成两个独立的无量纲量，而不是一个．比如，这两个量可以是雷诺数和**弗劳德数**，弗劳德数为

$$F=u^2/lg. \tag{19.5}$$

在公式(19.2)—(19.4)中，函数 f 此时将不只依赖于一个参数，而是依赖于两个参数(R 和 F)，因而，只有当这两个数值都相同时，两个流动才是相似的．

最后，我们可以提一下非定常流．要描述一个确定类型的非定常流的特征，不仅要由量 ν, u, l，而且还要有表示其流动特征的某时间间隔 τ，后者确定流动的变化率．例如，当浸没在流体中的确定形状的固体，按一定的规律振动时，τ 就可以是振动的周期．由 ν, u, l, τ 这四个量，我们又可以组成两个独立的无量纲量，这两个量可以是雷诺数以及有时所称的**斯特鲁哈(Strouhal)数**

$$S=u\tau/l. \tag{19.6}$$

在这种情况下，只有当这两个数的数值相同时，才存在相似流动．

若流体振动是自发地发生的(而不是在给定的外激发力作用下发生的)，则对于确定类型的运动，S 就是 R 的确定函数：

$$S=f(R).$$

§20. 斯托克斯公式

在小雷诺数流动的情况下，纳维-斯托克斯方程可大为简化．对于不可压缩流体的定常流，方程为

$$(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}=-\frac{1}{\rho}\nabla p+\frac{\eta}{\rho}\triangle\boldsymbol{v}.$$

量$(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}$的量级为$u^2/l$，$u$和$l$与§19中意义相同. 量$(\eta/\rho)\triangle\boldsymbol{v}$的量级为$\eta u/\rho l^2$. 这两个量的比值就是雷诺数. 因而如果雷诺数很小，则$(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}$可以忽略，运动方程可化为线性方程

$$\eta\triangle\boldsymbol{v}-\nabla p=0. \tag{20.1}$$

再加上连续方程

$$\nabla\cdot\boldsymbol{v}=0, \tag{20.2}$$

确定运动的方程组就完备了. 如对方程(20.1)取旋度，还可得到方程

$$\triangle(\nabla\times\boldsymbol{v})=0. \tag{20.3}$$

此式也是有用的.

作为一个例子，我们来研究球在粘性流体中的匀速直线运动. 很清楚，球的这种运动，与给定无穷远处来流速度为$\boldsymbol{u}$的流体绕固定球的流动，两者在问题性质上是完全等价的. 前一个问题中的速度分布，可简单地由后一个问题中的速度分布减去$\boldsymbol{u}$而得到；这样一来，在无穷远处流体静止，而球以速度$-\boldsymbol{u}$运动. 如果我们把流动看作是定常的，当然必须是讨论静止球体绕流；因为当球运动时，空间中任何一点的流体速度是随时间变化的.

于是，在无穷远处应有$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}$；我们写成$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}'+\boldsymbol{u}$；所以在无穷远，$\boldsymbol{v}'$是零. 因为$\nabla\cdot\boldsymbol{v}=\nabla\cdot\boldsymbol{v}'=0$，$\boldsymbol{v}'$可写成某个矢量的旋度：$\boldsymbol{v}=\nabla\times\boldsymbol{A}+\boldsymbol{u}$. 我们知道，极矢量的旋度是一个轴矢量，反之亦然. 因为速度是一个普通的极矢量，所以$\boldsymbol{A}$一定是轴矢量. 现在$\boldsymbol{v}$(因而$\boldsymbol{A}$)只依赖于矢径$\boldsymbol{r}$(原点取在球心)和参数$\boldsymbol{u}$，这两个矢量都是极矢量. 而且，$\boldsymbol{A}$显然必须是$\boldsymbol{u}$的线性函数. 对于完全对称的物体(球)，由两个极矢量可构成的这种轴矢量只有矢积$\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{u}$. 所以$\boldsymbol{A}$必定具有$f'(r)\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{u}$的形式，这里$f'(r)$只是$r$大小

的函数，而 $\boldsymbol{n}$ 是矢径方向的单位矢量．乘积 $f'(r)\boldsymbol{n}$ 可写成函数 $f(r)$ 的梯度 $\nabla f(r)$，所以 $\boldsymbol{A}$ 的一般形式是 $\nabla f\times\boldsymbol{u}$．于是我们可将速度 $\boldsymbol{v}'$ 写成

$$\boldsymbol{v}'=\nabla\times[\nabla f\times\boldsymbol{u}],$$

因为 $\boldsymbol{u}$ 是常矢量，$\nabla f\times\boldsymbol{u}=\nabla\times(f\boldsymbol{u})$，所以

$$\boldsymbol{v}=\nabla\times(\nabla\times(f\boldsymbol{u}))+\boldsymbol{u} \qquad (20.4)$$

为了确定函数 f，我们利用方程(20.3)．因为

$$\nabla\times\boldsymbol{v}=\nabla\times[\nabla\times(\nabla\times(f\boldsymbol{u}))]=[\nabla(\nabla\cdot)-\triangle]\nabla\times(f\boldsymbol{u})$$
$$=-\triangle[\nabla\times(f\boldsymbol{u})],$$

所以(20.3)写成

$$\triangle^2[\nabla\times(f\boldsymbol{u})]=0;$$

或者，因为 $\boldsymbol{u}=$ 常矢量，

$$\triangle^2(\nabla f\times\boldsymbol{u})=[\triangle^2(\nabla f)]\times\boldsymbol{u}=0$$

由此得出

$$\triangle^2(\nabla f)=0. \qquad (20.5)$$

初积分给出

$$\triangle^2 f=\text{常数}.$$

容易看出，这个常数必须为零，这是因为在无穷远处速度 $\boldsymbol{v}$ 必须为零，且它的导数也必须为零．表达式 $\triangle^2 f$ 包含 f 的四阶导数，而速度由 f 的二阶导数给出．于是我们有

$$\triangle^2 f\equiv\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}\right)\triangle f=0.$$

因而

$$\triangle f=2a/r+A.$$

若无穷远处速度为零，则常数 A 必须为零．由 $\triangle f=2a/r$，我们得

$$f=ar+b/r \qquad (20.6)$$

附加的常数是无关紧要的(因为速度由 f 的导数给出)，所以省略不写了。

把它代入(20.4),经简单计算得

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}-a\frac{\boldsymbol{u}+\boldsymbol{n}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n})}{r}+b\frac{3\boldsymbol{n}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n})-\boldsymbol{u}}{r^3}. \tag{20.7}$$

常数 a 和 b 必须由以下的边界条件确定:在球的表面($r=R$),$\boldsymbol{v}=0$,即

$$\boldsymbol{u}-a\frac{\boldsymbol{u}+\boldsymbol{n}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n})}{R}+b\frac{3\boldsymbol{n}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n})-\boldsymbol{u}}{R^3}=0.$$

因为这个方程必须对所有的 $\boldsymbol{n}$ 都成立,所以 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n})$ 的系数必须都是零:

$$\frac{a}{R}+\frac{b}{R^3}-1=0,\quad -\frac{a}{R}+\frac{3b}{R^3}=0.$$

因而 $a=\frac{3}{4}R,\ b=\frac{1}{4}R^3$. 于是最后得

$$f=\frac{3}{4}Rr+\frac{1}{4}R^3/r \tag{20.8}$$

$$\boldsymbol{v}=-\frac{3}{4}R\frac{\boldsymbol{u}+\boldsymbol{n}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n})}{r}-\frac{1}{4}R^3\frac{\boldsymbol{u}-3\boldsymbol{n}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n})}{r^3}+\boldsymbol{u}, \tag{20.9}$$

或用球坐标分量

$$\begin{aligned} v_r&=u\cos\theta\left[1-\frac{3R}{2r}+\frac{R^3}{2r^3}\right],\\ v_\theta&=-u\sin\theta\left[1-\frac{3R}{4r}-\frac{R^3}{4r^3}\right]. \end{aligned} \tag{20.10}$$

上式给出运动的球面附近的速度分布. 为确定压力,把(20.4)代入(20.1):

$$\nabla p=\eta\triangle\boldsymbol{v}=\eta\triangle[\nabla\times(\nabla\times(f\boldsymbol{u}))]=\eta\triangle[\nabla(\nabla\cdot(f\boldsymbol{u}))-\boldsymbol{u}\triangle f].$$

但 $\Delta^2 f=0$,所以

$$\nabla p=\nabla[\eta\triangle(\nabla\cdot(f\boldsymbol{u}))]=\nabla[\eta\boldsymbol{u}\cdot\nabla(\triangle f)].$$

于是

$$p=\eta\boldsymbol{u}\cdot\nabla(\triangle f)+p_0. \tag{20.11}$$

这里 p_0 是无穷远处流体的压力；将 f 代换以后，得最终表达式

$$p=p_0-\frac{3}{2}\eta\frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}}{r^2}R. \tag{20.12}$$

利用以上公式，我们可以计算运动流体作用在球上的力 F（或者，同样地，即球穿过流体运动时，作用在球上的阻力）。为此，我们取球坐标，以其极轴平行于 $\boldsymbol{u}$；由于对称性，所有的量只是 r 和极角 θ 的函数。力 $\boldsymbol{F}$ 显然平行于速度 $\boldsymbol{u}$。力的大小可由（15.12）确定。由此公式，取作用在球面元上力的分量——垂直于和相切于表面的分量，并把这两个分量投影在 $\boldsymbol{u}$ 方向上，我们得

$$F=\oint(-p\cos\theta+\sigma'_{rr}\cos\theta-\sigma'_{r\theta}\sin\theta)df. \tag{20.13}$$

这里积分区域是整个球面。

把表达式(20.10)代入以下公式：

$$\sigma'_{rr}=2\eta\frac{\partial v_r}{\partial r},\ \sigma'_{r\theta}=\eta\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\theta}+\frac{\partial v_\theta}{\partial r}-\frac{v_\theta}{r}\right)$$

（见(15.17)），我们得，在球面上

$$\sigma'_{rr}=0,\ \sigma'_{r\theta}=-\frac{3\eta}{2R}u\sin\theta.$$

而压力(20.12)是

$$p=p_0-\frac{3\eta}{2R}u\cos\theta$$

于是积分(20.13)化为

$$F=\frac{3\eta u}{2R}\oint df,$$

或最后有①

$$F=6\pi R\eta u. \tag{20.14}$$

① 为了今后某些应用，可以指出，若用速度公式(20.7)进行计算（常数 a 和 b 是未定的），我们得

$$F=8\pi a\eta u. \tag{20.14a}$$

这个公式称为**斯托克斯公式**，它给出球在流体中缓慢运动时所受的阻力. 我们注意到，阻力与速度和物体线度的一次方成正比①.

阻力对速度和物体线度的这种依赖关系对其它形状物体的缓慢运动也是适用的. 作用在任意形状物体上阻力的方向与速度方向是不同的，$\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{u}$ 关系式的一般形式可写成

$$F_i = a_{ik} u_k, \tag{20.15}$$

这里 a_{ik} 是与速度无关的二阶张量. 重要的是要注意，这个张量是对称张量($a_{ik} = a_{ki}$)；这个结果是在速度取线性近似的情况下才保持正确，并且这个结果是作为有消散过程的缓慢运动所适用的普遍规律的一个特殊情况②.

刚才对球体绕流所得的解，在远离球体的地方，即使是雷诺数很小时，也是不适用的. 为了弄清这一点，我们估算式(20.1)中略去的项$(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}$ 的大小. 在距离较远处，速度是 $\boldsymbol{u}$. 由(20.9)式看出，在这种距离上，速度的导数具有 uR/r^2 的量级. 因而$(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}$ 具有 u^2R/r^2 的量级. 在方程(20.1)中保留的项，比如$(1/\rho)\nabla p$，具有 $\eta Ru/\rho r^3$ 的量级(见(20.12)). 条件

$$u\eta R/\rho r^3 \gg u^2 R/r^2$$

只有在距离 $r \ll \nu/u$ 处才成立，这里 $\nu = \eta/\rho$. 在较大的距离处，略去这些项是不合理的，因而所求得的速度分布是不正确的.

---

① 也可算出缓慢运动的任意形状椭球的阻力. 对应的公式可参看 H. Lamb, *Hydrodynamics, 6th. ed.*, § 339. Combridge (1932). 这里给出半径为 R 的平面圆盘运动阻力的极限表达式. 对于圆盘沿垂直于其平面的方向运动的情形，则有

$$F = 16\eta Ru.$$

对于同样的圆盘在其自身平面内运动的情形，则有

$$F = 32\eta Ru/3.$$

② 例如，参看Л.Д. 朗道 E.M. 栗弗席茨著，杨训恺等译，统计物理学，§ 120 人民教育出社版 1964.

为了求得远离物体处的速度分布，必须考虑(20.1)中略去的项$(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}$. 因为在这些距离处，速度$\boldsymbol{v}$与$\boldsymbol{u}$近乎相等，我们可近似地用$\boldsymbol{u}\cdot\nabla$代替$\boldsymbol{v}\cdot\nabla$. 因而在远距离处，我们得到关于速度的线性方程[奥森，(C. W. Oseen)1910]为

$$(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}=-\frac{1}{\rho}\nabla p+\nu\triangle\boldsymbol{v}. \tag{20.16}$$

我们不准备在这里给出这个球体绕流方程的解①. 而只是说明，这样所求得的速度分布可用来推导作用在球体上阻力的更精确公式，它包含阻力按雷诺数uR/ν的幂次展开式的第二项. 这公式是②

$$F=6\pi\eta uR(1+3uR/8\nu). \tag{20.17}$$

最后，需要指出，在解无限长圆柱的横向绕流问题时，从一开始就必须用奥森方程；在这种情况下，方程(20.1)没有这样的解：它既满足柱体表面上的边界条件，同时又在无穷远处为零. 作用在单位圆柱长上的阻力可求出为

$$F=\frac{4\pi\eta u}{\frac{1}{2}-\gamma-\ln(uR/4\nu)}. \tag{20.18}$$

这里$\gamma=0.577$是欧拉常数.

问　　题

问题 1. 设有两个同心球面，半径为$R_1, R_2(R_2>R_1)$，它们分别以匀角速

① 对球体和柱体的详细计算可参看 Н. Е. Кочин, И. А. Кибель, Н. В. Розе, Теоретическая Гидромеханика, ч. 2, Chapter II §§25—26, Гостехиздат, (1948)、H. Lamb, Hydrodynamics, 6th ed, §§342-3, Cambridge(1932).

② 初看起来，因为奥森方程没有准确地给出球体附近的速度分布，似乎这个方程不能用来计算阻力的修正项. 但事实上，由邻近流体(这里$u\ll\nu/r$)运动而产生的阻力应按矢量$\boldsymbol{u}$的幂展开. 因而邻近流体运动产生的$\boldsymbol{F}$中第一个非零修正项是正比于$u^2\boldsymbol{u}$，即具有雷诺数的二次方. 所以它不影响公式(20.17)中一次方修正项. 对斯托克斯公式的进一步修正不能由奥森公式算出.

度 Ω_1 和 Ω_2 绕不同的直径旋转；两球面间充满流体. 雷诺数 $\Omega_1R_1^2/\nu$ 和 $\Omega_2R_2^2/\nu$ 与1相比是个小量. 试确定球面间流体的运动.

解: 由于方程是线性的，两个旋转球面间的运动可看作是两个运动的叠加，这两个运动分别是当一个球面静止而另一个球面旋转时求得的. 先令 $\Omega_2=0$，即只有内球面在旋转. 可合理地设想各点流体的速度都和一个圆相切，这些圆的圆心在转轴上，圆平面垂直于转轴. 根据轴对称性，沿这个方向的压力梯度为零. 因而运动方程(20.1)变成 $\triangle \boldsymbol{v}=0$. 角速度矢量 $\boldsymbol{\Omega}_1$ 是一个轴矢量. 作类似于前面所作的讨论，可以表明，速度可写成

$$\boldsymbol{v}=\nabla\times[f(r)\boldsymbol{\Omega}_1]=(\nabla f)\times\boldsymbol{\Omega}_1.$$

于是运动方程给出 $[\nabla(\triangle f)]\times\boldsymbol{\Omega}_1=0$，因为矢量 $\nabla(\triangle f)$ 平行于矢径，且对于给定的 $\boldsymbol{\Omega}_1$ 和任意的 $\boldsymbol{r}$ 而言，矢积 $\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{\Omega}_1$ 不为零，我们必定有 $\nabla(\triangle f)=0$ 所以

$$\triangle f=\text{常数},$$

积分得

$$f=ar^2+\frac{b}{r},\qquad \boldsymbol{v}=\left(\frac{b}{r^3}-2a\right)\boldsymbol{\Omega}_1\times\boldsymbol{r},$$

常数 a 和 b 由以下条件确定：当 $r=R_2$ 时 $\boldsymbol{v}=0$，又当 $r=R_1$ 时 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}$，这里 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{\Omega}_1\times\boldsymbol{r}$ 是旋转球面上各点的速度. 结果是

$$\boldsymbol{v}=\frac{R_1^3R_2^3}{R_2^3-R_1^3}\left(\frac{1}{r^3}-\frac{1}{R_2^3}\right)\boldsymbol{\Omega}_1\times\boldsymbol{r}.$$

流体压力是常数($p=p_0$). 类似地，对外球旋转内球静止($\Omega_1=0$)的情形，我们有

$$\boldsymbol{v}=\frac{R_1^3R_2^3}{R_2^3-R_1^3}\left(\frac{1}{R_1^3}-\frac{1}{r^3}\right)\boldsymbol{\Omega}_2\times\boldsymbol{r}.$$

在两个球都旋转的一般情况下，我们有

$$\boldsymbol{v}=\frac{R_1^3R_2^3}{R_2^3-R_1^3}\left\{\left(\frac{1}{r^3}-\frac{1}{R_2^3}\right)\boldsymbol{\Omega}_1\times\boldsymbol{r}+\left(\frac{1}{R_1^3}-\frac{1}{r^3}\right)\boldsymbol{\Omega}_2\times\boldsymbol{r}\right\}.$$

若设有外球($R_2=\infty, \Omega_2=0$)，即只有一个半径为 R 的球，在无限大的流体区域中旋转，则

$$\boldsymbol{v}=\frac{R^3}{r^3}\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}.$$

我们来计算这种情况下作用在球上的摩擦力矩. 取球坐标，其极轴平行于 $\boldsymbol{\Omega}$，我们有 $v_r=v_\theta=0$, $v_\phi=v=(R^3\Omega/r^2)\sin\theta$. 作用在球面单位面积上的摩擦力是

$$\sigma'_{r\phi}=\eta\left(\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{v}{r}\right)_{r=R}=-3\eta\Omega\sin\theta.$$

作用在球上的总力矩是

$$M=\int_0^\pi \sigma'_{r\phi}R\sin\theta\cdot 2\pi R^2\sin\theta d\theta,$$

于是我们得

$$M=-8\pi\eta R^3\Omega.$$

若没有内球，$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\Omega}_2\times\boldsymbol{r}$，即流体只是随着包围它的球面而刚性地旋转.

问题 2. 设有一粘性系数为 η' 的球形流体小滴，在重力作用下，运动于粘性系数为 η 的流体中，求小滴的速度(黎布钦斯基 1911).

解: 我们采用这样一种坐标系：在这坐标系中，流体小滴静止不动．对小滴外面的流体，我们还是求方程(20.5)的具有(20.6)形式的解，所以速度有(20.7)的形式．对于滴内流体，必须找在 $r=0$ 处没有奇点的解(因而用于确定速度的 f 的二阶导数在 $r=0$ 处也必须保持有限值)．这个解是

$$f=\frac{1}{4}Ar^2+\frac{1}{8}Br^4,$$

而对应的速度为

$$\boldsymbol{v}=-A\boldsymbol{u}+Br^2[\boldsymbol{n}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n})-2\boldsymbol{u}].$$

在球面上[①]，必须满足下面条件．即滴外和滴内的法向速度分量 v_e 和 v_i 应为零：

$$v_{i,r}=v_{e,r}=0.$$

切向速度分量必须连续：

$$v_{i,\theta}=v_{e,\theta},$$

应力张量的分量 $\sigma_{r\theta}$ 亦应如此

$$\sigma_{i,r\theta}=\sigma_{e,r\theta}.$$

应力张量分量 σ_{rr} 彼此相等的条件毋须写出，这个条件可以确定所要求的速

---

① 我们可以略去运动过程中流体滴的形状的变化，因为这种变化是更高阶的少量．但应记住，为使运动的滴事实上是球形的，由于边界上表面张力引起的力必须超过压差引起的力，后者倾向于使流体滴成为非球形．这意味着应有

$$\eta u/R\ll\alpha/R,$$

这里 α 是表面张力系数，或用 $u\sim R^2g\rho/\eta$ 代人，得

$$R\ll\sqrt{\alpha/\rho g}.$$

度 u，而 u 用下面给出的方法求更简单. 由上面四个条件，我们得到关于常数 a，b，A，B的四个方程，这些方程的解是

$$a=R\frac{2\eta+3\eta'}{4(\eta+\eta')},$$

$$b=R^3\frac{\eta'}{4(\eta+\eta')},$$

$$A=-BR^2=\frac{\eta}{2(\eta+\eta')}.$$

按(20.14a)式，阻力为

$$F=2\pi u\eta R(2\eta+3\eta')/(\eta+\eta').$$

当 $\eta'\to\infty$(对应于固体球)，此式变成斯托克斯公式. 在 $\eta'\to 0$ 的极限情形(对应于气泡)，我们有 $F=4\pi u\eta R$，即这时阻力是作用在固体球上阻力的2/3.

让F等于作用在小滴上的重力$\frac{4}{3}\pi R^2(\rho-\rho')g$，我们得

$$u=\frac{2R^2g(\rho-\rho')(\eta+\eta')}{3\eta(2\eta+3\eta')}.$$

问题3. 两块平行的平面圆盘(直径均为R)，一个位于另一个上方，相隔一小段距离，两盘之间充满着流体. 两盘相互间以等速 u 排开流体而靠近. 试确定盘子运动所受的阻力. (雷诺)

解: 我们取柱坐标，原点在下盘中心，并设下盘固定. 流动是轴对称的. 且因为流体层较薄，所以主要是径向流动: $v_z\ll v_r$，同时还有 $\partial v_r/\partial r\ll\partial v_r/\partial z$. 于是运动方程为

$$\eta\frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2}=\frac{\partial p}{\partial r},\quad \frac{\partial p}{\partial z}=0, \tag{1}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(rv_r)}{\partial r}+\frac{\partial v_z}{\partial z}=0. \tag{2}$$

其边界条件为

在 $z=0$ 处: $v_r=v_z=0$,

在 $z=h$ 处: $v_r=0, v_z=-u$,

在 $r=R$ 处: $p=p_0$.

这里 h 是两盘间距离，p_0 是外界压力. 由方程(1)，我们得

$$v_r=\frac{1}{2\eta}\frac{\partial p}{\partial r}z(z-h).$$

将方程(2)对 z 进行积分得

$$u-\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\int_0^h rv_r dz=-\frac{h^3}{12\eta r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dp}{dr}\right),$$

因而

$$p=p_0+\frac{3\eta u}{h^3}(R^2-r^2).$$

运动盘所受的总阻力是

$$F=3\pi\eta uR^4/2h^3.$$

§21. 层流尾迹

在粘性流体绕固体的定常流动中，在物体后面较远地方的流动具有某些特征，我们可以独立地研究这些特征，而不涉及物体的具体形状.

用$\boldsymbol{U}$表示来流的恒定速度，我们取$\boldsymbol{U}$的方向为X轴，原点取在物体内某处. 任一点的实际流速可写成$\boldsymbol{U}+\boldsymbol{v}$，在无穷远处，$\boldsymbol{v}$为零.

我们发现，在物体后面较远的地方，只有在X轴附近相当窄的范围内，速度$\boldsymbol{v}$才显著地异于零. 这个区域就称为层流尾迹①，只有沿着十分靠近物体的流线运动的流体质点才能进入这个区域. 因而尾迹中的流动本质上是有旋流. 另一方面，对于不靠近物体的流线上的任何点，粘性几乎没有影响. 来流中的涡量为零，而在这些流线上，涡量实际上保持为零，就像在理想流体中那样. 于是，除了尾迹以外，离物体较远的流动处处可看作是势流.

我们来推导一些公式，以便把尾迹中流动的性质与作用在物体上的力联系起来. 通过包围物体的任一封闭曲面，流体所输运的总动量等于动量通量密度张量在该曲面上的积分：$\oint\Pi_{ik}df_k$. 张量分量 Π_{ik} 是

① 以便与湍流尾迹相区别，见 §36.

$$\Pi_{ik}=p\delta_{ik}+\rho(U_i+v_i)(U_k+v_k).$$

我们把压力写成 $p=p_0+p'$ 的形式，这里 p_0 是无穷远处的压力. 常数项

$$p_0\delta_{ik}+\rho U_iU_k$$

的积分得零，这是因为在一封闭曲面上的矢量积分 $\oint d\boldsymbol{f}$ 是零. 积分 $U_i\oint\rho v_k df_k$ 也为零，因为所讨论的体积中的流体总质量是不变的，所以通过包围着这个体积的曲面的总流量 $\oint\rho\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{f}$ 应为零. 最后，离物体很远地方的速度 $\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{U}$ 相比是个小量. 因此，若所讨论的曲面离物体足够远，则 Π_{ik} 中的项 ρv_iv_k 与 ρU_kv_i 相比就可略去不计. 于是总的动量通量是

$$\oint(p'\delta_{ik}+\rho U_kv_i)df_k.$$

现在我们取所讨论的流体体积是介于两个 $x=$ 常数的无限平面之间的体积，这两个平面中的一个在物体之前很远的地方，一个在物体之后很远的地方. 在无穷远处“横侧”表面上，上述积分为零(因为在无穷远处 $p'=\boldsymbol{v}=0$)，所以只要在两个平面上积分就够了. 因而，所求得的动量通量显然是通过前平面流来的总动量通量和通过后平面流走的总动量通量之差. 而这个差值就是每单位时间由流体传递给物体的动量，即作用在物体上的力 $\boldsymbol{F}$.

于是，这个力的分量为

$$F_x=\left(\iint\limits_{x=x_2}-\iint\limits_{x=x_1}\right)(p'+\rho Uv_x)dydz,$$

$$F_y=\left(\iint\limits_{x=x_2}-\iint\limits_{x=x_1}\right)\rho Uv_ydydz,$$

$$F_z=\left(\iint\limits_{x=x_2}-\iint\limits_{x=x_1}\right)\rho Uv_zdydz.$$

这里积分区域是整个无限平面 $x=x_1$(在物体后面很远的地方)和 $x=x_2$(在物体前面很远的地方). 我们先来讨论 F_x 的表达式.

尾迹以外是势流,所以伯努利方程成立

$$p+\frac{1}{2}\rho(\boldsymbol{U}+\boldsymbol{v})^2=\text{常数}\equiv p_0+\frac{1}{2}\rho U^2$$

或者,与 $\rho\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{v}$ 相比,略去$\frac{1}{2}\rho v^2$ 项,有

$$p'=-\rho U v_x.$$

我们看到,在这样的近似情况下,在尾迹以外,F_x 中的积分处处为零. 换句话说,在平面 $x=x_2$(它位于物体的前面,不与尾迹相交)上,积分为零,而在平面 $x=x_1$ 上积分只需在尾迹横截面所对应的面积上进行. 但在尾迹之内,压力变化 p' 的量级为 ρv^2,即与 $\rho U v_x$ 相比是个小量. 于是得到物体上的阻力为

$$F_x=-\rho U\iint v_x dydz. \tag{21.1}$$

这里积分是在物体后面远处尾迹的整个横截面上计算的. 当然,尾迹内的速度 v_x 是负的, 这里流体运动比不存在物体时要慢些. 应注意, (21.1)中积分给出的通过尾迹的流量达不到不存在物体情况下的相应数值.

现在来研究使物体作横向运动的力(其分量为 F_y, F_z). 这个力称为**升力**. 尾迹外面是势流,可写成 $v_y=\partial\phi/\partial y, v_z=\partial\phi/\partial z$; 平面 $x=x_2$ 不涉及尾迹,在它上面的积分为零:

$$\iint v_y dydz=\iint\frac{\partial\phi}{\partial y}dydz=0,\qquad \iint\frac{\partial\phi}{\partial z}dydz=0.$$

这是因为在无穷远处 $\phi=0$. 所以得升力

$$F_y=-\rho U\iint v_y dydz,\qquad F_z=-\rho U\iint v_z dydz. \tag{21.2}$$

在此二式中仍然只须在尾迹的横截面上取积分. 若物体有个对称

轴(不必完全轴对称)，且流动平行于这个轴，则绕物体的流动也有个对称轴．在这种情况下，升力当然为零．

我们来研究尾迹中的流动．对纳维-斯托克斯方程中各项量级的估计表明，在离物体的距离为 r 处，只要 $rU/\nu\gg1$，项 $\nu\triangle\boldsymbol{v}$ 一般可以略去不计(参看 § 20 开头关于相反条件的推导)；在这些距离处，尾迹外面的流动可当作势流．但对尾迹内部而言，即使在这些距离处，该项还是不能略去，因为横向导数 $\partial^2\boldsymbol{v}/\partial y^2$, $\partial^2\boldsymbol{v}/\partial z^2$ 比起 $\partial^2\boldsymbol{v}/\partial x^2$ 是个大量．

在尾迹里面，纳维-斯托克斯方程中项$(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}$ 的量级是

$$(U+v)\frac{\partial v}{\partial x}\sim\frac{Uv}{x},$$

项 $\nu\triangle\boldsymbol{v}$ 的量级是

$$\nu\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\sim\nu\frac{v}{Y^2},$$

这里 Y 表示尾迹宽度，即从 X 轴至速度 $\boldsymbol{v}$ 显著减小之处的距离的量级．若这两项大小相当，可得

$$Y\sim\sqrt{\nu x/U}. \tag{21.3}$$

事实上，由 $Ux/\nu\gg1$ 的假设条件可知，Y 这个量与 x 相比是个小量．所以层流尾迹的宽度是随与物体距离的平方根而增加的．

为了求出尾迹中速度如何随 x 增加而减小的变化关系，我们回到公式(21.1)．积分区域面积为 Y^2 的量级．因而可估算出该积分约为 $F_x\sim\rho UvY^2$，再利用关系式(21.3)得

$$\boldsymbol{v}\sim F_x/\rho\nu x. \tag{21.4}$$

问 题

问题1. 试确定有阻力和升力的情况下层流尾迹内的流动．

解： 把纳维-斯托克斯方程中的速度写成 $\boldsymbol{U}+\boldsymbol{v}$ 的形式，并(在远离物体处)略去含 $\boldsymbol{v}$ 二次方的项，我们得

$$U\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x}=-\nabla\left(\frac{p}{\rho}\right)+\nu\left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{v}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \boldsymbol{v}}{\partial z^2}\right),$$

上式已略去了$\triangle \boldsymbol{v}$ 中的项 $\partial^2\boldsymbol{v}/\partial x^2$. 现在来求$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2$形式的解，其中$\boldsymbol{v}_1$满足

$$U\frac{\partial \boldsymbol{v}_1}{\partial x}=\nu\left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{v}_1}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \boldsymbol{v}_1}{\partial z^2}\right).$$

由于原来方程中有一项$-\nabla(p/\rho)$而出现的项 $\boldsymbol{v}_2$; 可当作是某个标量的梯度 $\nabla\Phi$ 来求. 因为在远离物体处，Φ 对 x 的导数比起对 y 和 z 的导数是个小量，按相同的近似，我们可以略去 v_x 中的项 $\partial\Phi/\partial x$, 即取 $v_x=v_{1x}$.

于是我们得 v_x 的方程

$$U\frac{\partial v_x}{\partial x}=\nu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right).$$

在形式上这个方程与二维导热方程相同，用 x/U 代替了时间，用粘性系数 ν 代替了导温系数. 若要求方程的解符合随 y 和 z 的增大而减小的规律(对固定的 x 而言)，并且当 $x\to 0$ 时能给出一个无限窄的尾迹(在目前近似程度下，认为物体尺度很小)，则这种解 v_x 应是(见 §51)

$$v_x=-\frac{F_x}{4\pi\rho\nu}\frac{1}{x}e^{-U(y^2+z^2)/4\nu x}. \tag{1}$$

利用公式 (21.1)，此式中的常系数已用阻力表示. 由于 v_x 迅速减小，(21.1)中沿 y 和 z 的积分域可扩展到$\pm\infty$. 若用球坐标 r, θ, ϕ 代替直角坐标，且以 x 轴为极轴，则尾迹区域($[y^2+z^2]^{1/2}\ll x$)对应于 $\theta\ll 1$. 在这种坐标中，公式(1)变成

$$v_x=-\frac{F_x}{4\pi\rho\nu}\frac{1}{r}e^{-Ur\theta^2/4\nu}. \tag{1'}$$

v_x 中略去的项 $\partial\Phi/\partial x$(Φ由下面的公式(3)给出)应按 $1/r^2$ 而更迅速地减小.

v_{1y} 和 v_{1z} 必须具有与(1)相同的形式. 我们取升力的方向作为 y 轴的方向(因而 $F_z=0$). 因为在无穷远处 $\Phi=0$, 根据(21.2)我们有

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}v_y dydz=\iint\left(v_{1y}+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)dydz$$

$$=\iint v_{1y}dydz=-\frac{F_y}{\rho U},$$

$$\iint v_{1z}dydz=0.$$

由这些条件确定 v_{1y} 和 v_{1z} 中的常数，即得

$$\begin{cases} v_y = -\dfrac{F_y}{4\pi\rho\nu}\dfrac{1}{x}e^{-U(y^2+z^2)/4\nu x} + \dfrac{\partial\Phi}{\partial y}, \\ v_z = \dfrac{\partial\Phi}{\partial z}. \end{cases} \tag{2}$$

为了求出函数 Φ, 我们作如下运算. 根据连续方程

$$\nabla\cdot\boldsymbol{v}\approx\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}=0;$$

将(2)式代入, 我们有

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\Phi=-\frac{\partial v_{1y}}{\partial y}.$$

将此方程对 x 求导数, 并利用 v_{1y} 所满足的方程, 我们得

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\frac{\partial\Phi}{\partial x}=-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v_{1y}}{\partial x}\right)$$

$$=-\frac{\nu}{U}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\frac{\partial v_{1y}}{\partial y}.$$

因而

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}=-\frac{\nu}{U}\frac{\partial v_{1y}}{\partial y}.$$

最后, 以 v_{1y} 的表达式代入, 并对 x 积分, 得

$$\Phi=-\frac{F_y}{2\pi\rho U}\frac{y}{y^2+z^2}\left[e^{-U(y^2+z^2)/4\nu x}-1\right]. \tag{3}$$

选择积分常数应使得当 $y=z=0$ 时, Φ保持有限值. 在球坐标中 (方位角 φ 从 xy 平面量起)

$$\Phi=-\frac{F_y}{2\pi\rho U}\frac{\cos\phi}{r\theta}\left[e^{-Ur\theta^2/4\nu}-1\right]. \tag{3'}$$

由(2)和(3)看出, v_y、v_z 与 v_x 不同的是, 随着与尾迹"轴"的距离增大, 不仅含有随 θ 指数地减少的项(对给定的 r), 还含有只随 $1/\theta^2$ 减少的项.

不出所料, 定性结果(21.3)和(21.4)与上述公式是相符合的. 如果没有升力, 尾迹中的流动就是轴对称的.

问题2. 试确定远离物体处尾迹外面的流动.

解: 假设尾迹外面是势流. 因为我们所关心的只是势Φ中随距离减小得最缓慢的项, 所以寻求拉普拉斯方程△Φ=0 具有以下两项之和的解:

$$\Phi=\frac{a}{r}+\frac{\cos\phi}{r}f(\theta),$$

其中第一项是中心对称的且与力 F_x 有关, 而第二项是关于 xy 平面对称的且

与力 F_y 有关.

利用球坐标中 $\triangle\Phi$ 的表达式, 我们得函数 $f(\theta)$ 的方程

$$\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{df}{d\theta}\right)-\frac{f}{\sin\theta}=0.$$

当$\theta\to\pi$时, 这个方程的有界解是$f=b\,\mathrm{ctg}\frac{\theta}{2}$. 必须确定系数 b 以便给出 F_y 的正确值. 但利用以下事实处理更为简单, 即$(\nu/Ur)^{1/2}\ll\theta\ll 1$ 的范围内, Φ的这一部分一定要与表达式

$$\Phi=\frac{F_y}{2\pi\rho U}\frac{\cos\phi}{r\theta}$$

相同, 这个表达式是由问题 1 中关于尾迹内 Φ 的公式(3′)得到的. 因而

$$b=\frac{F_y}{4\pi\rho U}.$$

为了确定系数 a, 我们注意到, 像通过任何封闭曲面的情形一样, 通过半径 r 很大的球面 S 的总质量通量为零. 通过尾迹与 S 相交部分 S_0 流入的流量是

$$-\iint_{S_0} v_x dydz=\frac{F_x}{\rho U}.$$

因而通过球面其余部分一定有相同的量流出, 即一定有

$$\oint_{S-S_0}\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{f}=\frac{F_x}{\rho U}$$

由于 S_0 与 S 相比是个小量, 我们可以令

$$\oint_S \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{f}=\oint_S \nabla\Phi\cdot d\boldsymbol{f}=-4\pi a=F_x/\rho U,$$

所以

$$a=-\frac{F_x}{4\pi\rho U}.$$

以上两式之和给出了问题的全解:

$$\Phi=\frac{1}{4\pi\rho Ur}\left(-F_x+F_y\cos\phi\,\mathrm{ctg}\frac{\theta}{2}\right), \tag{1}$$

此式给出远离物体处尾迹外面各点的流动. 随着距离 r 的增加, 势Φ按 $1/r$ 减少, 所以速度 v 按 $1/r^2$ 减小. 若没有升力, 则尾迹外面的流动是球对称的.

§ 22. 悬浮流体的粘性

流体中悬浮着大量的细小固体颗粒，就形成**悬浮流体**. 如果我们所研究的现象，其特征长度比颗粒的尺度大得多，就可以把悬浮流体看作是均匀介质. 这种介质具有有效粘性系数 η，它与原来流体的粘性系数 η_0 是不同的. 对于悬浮颗粒浓度很小的情形(即颗粒总体积与流体体积之比是个小量)，可以算出这个 η 值. 对于球形颗粒的情形，这种计算是相当简单的(爱因斯坦，1906).

首先必须考虑浸在流体中的单个固体小球对流动的影响，该流动的速度梯度是常量. 设未受扰的流动由线性速度分布

$$v_{0i}=\alpha_{ik}x_k \tag{22.1}$$

描述，其中 α_{ik} 是常对称张量. 流体压力是常数

$$p_0=\text{常数},$$

在下面我们取 p_0 为零，就是说只计算对这个常数的偏差值. 若流体是不可压缩的($\nabla\cdot\boldsymbol{v}_0=0$)，则张量 α_{ik} 对角线元素的和一定是零

$$\alpha_{ii}=0. \tag{22.2}$$

现在设有半径为 R 的小球置于原点. 用 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_0+\boldsymbol{v}_1$ 表示因小球存在而改变了的流体速度. 在无穷远处 $\boldsymbol{v}_1$ 必定为零；但在小球附近，$\boldsymbol{v}_1$ 与 $\boldsymbol{v}_0$ 相比不是小量. 由流动的对称性，显然球保持静止，所以边界条件是在 $r=R$ 处，$\boldsymbol{v}=0$.

运动方程(20.1)到(20.3)所要求的解，可以立即由解(20.4)并用(20.6)所给定的函数 f 求得，只要注意这个解的空间导数也是方程组的解. 在目前情况下，我们希望求得一个解，它以张量 α_{ik} 的分量作为参数(而不像 § 20 中那样依赖于矢量 $\boldsymbol{u}$). 这样一个解是

$$\boldsymbol{v}_1=\nabla\times\{\nabla\times[(\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla)f]\},$$

$$p=\eta_0\alpha_{ik}\frac{\partial^2\triangle f}{\partial x_i\partial x_k}$$

这里$(\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla)f$表示其分量为$\alpha_{ik}\partial f/\partial x_k$ 的矢量. 把以上两式展开，并确定函数

$$f=ar+b/r$$

中的常数 a 和 b, 使之满足小球表面的边界条件，我们得出速度和压力的公式如下

$$v_{1i}=\frac{5}{2}\left(\frac{R^5}{r^4}-\frac{R^3}{r^2}\right)\alpha_{kl}n_in_kn_l-\frac{R^5}{r^4}\alpha_{ik}n_k. \tag{22.3}$$

$$p=-5\eta_0\frac{R^5}{r^3}\alpha_{ik}n_in_k,$$

这里$\boldsymbol{n}$ 是矢径方向的单位矢量.

现在回到确定悬浮流体有效粘性系数的问题，我们来计算动量通量密度张量 Π_{ik}(对体积)的平均值. 按照对于速度的线性近似，张量 Π_{ik} 与应力张量$-\sigma_{ik}$ 是相等的，即有

$$\bar{\sigma}_{ik}=\frac{1}{V}\int\sigma_{ik}dV, \tag{22.4}$$

这里可在半径很大的球体积 V 上取积分，然后让半径延伸到无限远.

首先，我们有恒等式

$$\bar{\sigma}_{ik}=\eta_0\left(\overline{\frac{\partial v_i}{\partial x_k}}+\overline{\frac{\partial v_k}{\partial x_i}}\right)-\bar{p}\delta_{ik}+$$

$$+\frac{1}{V}\int\left\{\sigma_{ik}-\eta_0\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)+p\delta_{ik}\right\}dV. \tag{22.5}$$

除了固体小球内部之外，上式右边的被积函数为零；因为假设悬浮流体的浓度很小，可先对只有单个小球的情形计算这个积分，这时似乎别的小球并不存在，然后乘上悬浮流体的浓度 c(单位体积内小球的个数). 直接计算这个积分需要研究球中的内应力. 但我们可以把这个体积分转换到无限大球面上的面积分来克服这个

困难，设这个无限大的球面完全处在流体中．为此，我们注意到由运动方程 $\partial\sigma_{il}/\partial x_l=0$，便可得出恒等式

$$\sigma_{ik}=\partial(\sigma_{il}x_k)/\partial x_l;$$

因此，把体积分转换成面积分可写成

$$\sigma_{ik}=\eta_0\left(\overline{\frac{\partial v_i}{\partial x_k}}+\overline{\frac{\partial v_k}{\partial x_i}}\right)$$

$$+c\oint\{\sigma_{il}x_k df_l-\eta_0(v_i df_k+v_k df_i)\}.$$

因为平均压力必定为零，我们略去了 $\bar{p}$ 项．$\bar{p}$ 是个标量，它必须由分量 α_{ik} 的线性组合给出，而这个唯一的标量是 $\alpha_{ii}=0$.

在计算半径很大的球面上的积分时，速度表达式(22.3)中只须保留 $1/r^2$ 量级的项．经过简单计算，得出积分的值为

$$c\eta_0\cdot 20\pi R^3\{5\alpha_{lm}\overline{n_i n_k n_l n_m}-\alpha_{il}\overline{n_k n_l}\},$$

这里一横表示对各个方向的单位矢量 $\boldsymbol{n}$ 取平均．通过取平均值①，我们最后得

$$\bar{\sigma}_{ik}=\eta_0\left(\overline{\frac{\partial v_i}{\partial x_k}}+\overline{\frac{\partial v_k}{\partial x_i}}\right)+5\eta_0\alpha_{ik}\cdot\frac{4}{3}\pi R^3 c. \tag{22.6}$$

第二项与第一项的比值确定了为给出悬浮流体有效粘性系数所要求的相对修正量．如果我们只关心一级小量的修正量，可取第一项为 $2\eta_0\alpha_{ik}$．于是我们得悬浮流体的有效粘性系数为：

$$\eta=\eta_0\left(1+\frac{5}{2}\phi\right), \tag{22.7}$$

这里 $\phi=\frac{4}{3}\pi R^3 c$ 是小球总体积与悬浮流体总体积的比值，是个

① 所要求的单位矢量分量乘积的平均值是对称张量，它只能由单位张量 δ_{ik} 组成．因而不难求得

$$\overline{n_i n_k}=\frac{1}{3}\delta_{ik}$$

$$\overline{n_i n_k n_l n_m}=\frac{1}{15}(\delta_{ik}\delta_{lm}+\delta_{il}\delta_{km}+\delta_{im}\delta_{kl}).$$

小量.

§23. 粘性流体运动方程的精确解

如果粘性流体运动方程的非线性项不恒为零，解这些方程就会有很大困难，只有在很少几种情况下才能求得精确解. 而且，至今还不可能对很大雷诺数的极限情况下，充满整个空间的粘性流体绕物体的定常流动实现全面的研究. 以后我们将会看到，这样一种流动实际上不能保持为定常流，但是，尽管如此，求解这个问题还是具有方法论上的重要意义①.

下面我们来给出关于粘性流体运动方程精确解的几个例子.

(1)设有一个无限大的平面圆盘浸没在粘性流体中，圆盘绕自身轴线均匀旋转. 试确定圆盘运动所引起的流体运动(冯卡门T. von Karmán 1921).

现取柱坐标系，以盘面为 $z=0$ 的平面. 设圆盘以角速度 Ω 绕 z 轴旋转. 考虑 $z>0$ 一侧为无界的流体区域. 边界条件是

$$v_r=0,\quad v_\phi=\Omega r,\ v_z=0 \qquad (\text{在 } z=0 \text{ 处}),$$

$$v_r=0,\quad v_\phi=0, \qquad (\text{在 } z=\infty \text{ 处}).$$

当 $z\to\infty$ 时，轴向速度 v_z 不为零，而是趋向于一个负常数值，它由运动方程确定. 这是因为流体有离开旋转轴的径向运动，特别是在圆盘附近. 为了满足连续方程，就一定有来自无穷远的等速垂直流动. 我们寻求运动方程下列形式的解

$$v_r=r\Omega F(z_1);\quad v_\phi=r\Omega G(z_1);\quad v_z=(\nu\Omega)^{1/2}H(z_1);$$

$$p=-\rho\nu\Omega P(z_1),\quad \text{式中 } z_1=(\Omega/\nu)^{1/2}z. \qquad (23.1)$$

上述的速度分布表明，径向和周向速度与该点至旋转轴的距离 r

① 奥森(Oseen)的“零粘性”理论与这个问题有关；该理论是不能令人满意的，因为它基于对纳维-斯托克斯方程不合理的简化. 而普朗特边界层理论(见§39)不能解决整个流动空间的问题.

成正比，而在每一个水平平面上 v_z 是常量.

将上式代入纳维-斯托克斯方程和连续方程，我们得出关于函数 F、G、H 和 P 的下列方程:

$$\begin{aligned} &F^2-G^2+F'H=F'', \quad 2FG+G'H=G'', \\ &HH'=P'+H'', \qquad 2F+H'=0; \end{aligned} \tag{23.2}$$

其中上标撇表示对 z_1 的导数. 边界条件是

$$F=0, \quad G=1, \quad H=0, \quad (\text{在 } z_1=0 \text{ 处})$$

$$F=0, G=0, \qquad\qquad (\text{在 } z=\infty \text{ 处})$$

这样我们就把本题的求解化为一个自变量的常微分方程组的积分问题；这个问题可用数值积分求解①. 图 7 表示用这种方法求得的函数 F,G 和 $-H$. 当 $z_1\to\infty$ 时，H 的极限值是 -0.886；换句话说，无穷远处流体速度是 $v_z(\infty)=-0.886(\nu\Omega)^{1/2}$.

作用在单位面积上并且垂直于径向的摩擦力是 $\sigma_{z\phi}$

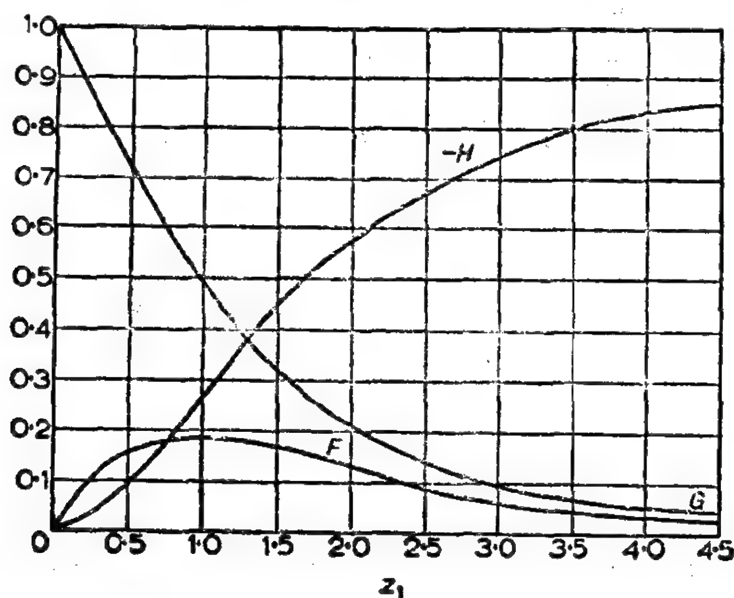


图 7

① 对另一个类似的问题，即圆盘静止而无穷远处流体均匀旋转的问题，已用数值积分求解（U. T. Bödewadt, *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, **20**, 241, 1940）.

$=\eta(\partial v_\phi/\partial z)_{z=0}$. 忽略边缘效应，可以把作用在半径 R 很大但为有限值的圆盘上的摩擦力矩写为

$$M=2\int_0^R 2\pi r^2\sigma_{z\phi}dr=\pi R^4\rho\sqrt{\nu\Omega^3}\cdot G'(0). \tag{23.3}$$

积分号前面出现因子 2 是因为圆盘有两面接触流体. 函数 G 的数值计算给出公式

$$M=-1.94R^4\rho\sqrt{\nu\Omega^3}. \tag{23.4}$$

(2) 设有两个平面壁，交成 α 角(图 8 表示这两个平面的横截面)，有流体从两个平面的交线流出，(或流入交线)，试确定两平壁间的定常流动.（哈麦尔 1916）

现取圆柱坐标系 r，z，ϕ，其中 z 轴沿两个平面的交线（图 8 中的点 O)，角 ϕ 的量度如图 8 所示. 沿 z 向的流动是均匀的，并且自然可以假设流动完全是沿径向的，即

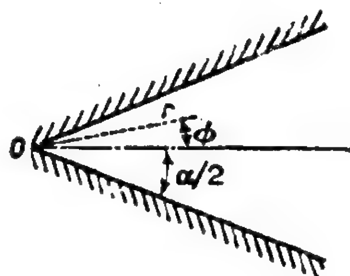


图 8

$$v_\phi=v_z=0,\quad v_r=v(r,\phi).$$

方程(15.16)给出

$$v\frac{\partial v}{\partial r}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}+\nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial\phi^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{v}{r^2}\right), \tag{23.5}$$

$$-\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial\phi}+\frac{2\nu}{r^2}\frac{\partial v}{\partial\phi}=0, \tag{23.6}$$

$$\frac{\partial(rv)}{\partial r}=0.$$

由后面一个方程看出 rv 仅仅是 ϕ 的函数. 引进函数

$$u(\phi)=\frac{rv}{6\nu} \tag{23.7}$$

我们由(23.6)式得

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial\phi}=\frac{12\nu^2}{r^2}\frac{du}{d\phi},$$

因此

$$\frac{p}{\rho}=\frac{12\nu^2}{r^2}u(\phi)+f(r).$$

把这个式子代进(23.5)，得

$$\frac{d^2u}{d\phi^2}+4u+6u^2=\frac{1}{6\nu^2}r^3f'(r).$$

由上式看出，因为左边只依赖于 ϕ，而右边只依赖于 r，所以两边必须等于同一常数，我们把这个常数记作 $2C_1$. 于是 $f'(r)=12\nu^2C_1/r^3$，因此 $f(r)=-6\nu^2C_1/r^2+$常数，而压力为

$$\frac{p}{\rho}=\frac{6\nu^2}{r^2}(2u-C_1)+\text{常数}. \tag{23.8}$$

关于 $u(\phi)$，我们有方程

$$u''+4u+6u^2=2C_1,$$

方程两端乘以 u'，并积分一次，可得

$$\frac{1}{2}u'^2+2u^2+2u^3-2C_1u-2C_2=0.$$

因此有

$$2\phi=\pm\int\frac{du}{\sqrt{-u^3-u^2+C_1u+C_2}}+C_3. \tag{23.9}$$

此式给出所要求的速度对 ϕ 的依赖关系；函数 $u(\phi)$ 可用椭圆函数表示. 三个常数 C_1、C_2、C_3 由以下条件确定：边界条件

$$u\left(\pm\frac{1}{2}\alpha\right)=0 \tag{23.10}$$

和等流量条件，就是单位时间内通过任一横截面 $r=$常数的流体质量 Q 相同，即

$$Q=\rho\int_{-\alpha/2}^{\alpha/2}vr\,d\phi=6\nu\rho\int_{-\alpha/2}^{\alpha/2}u\,d\phi. \tag{23.11}$$

Q 可正可负. 若 $Q>0$，则二平面交线处是源，即流体由角顶流出，这种情况称为**扩张渠道内的流动**. 若 $Q<0$，则交线处是汇，这称

为收缩渠道内的流动．比值$|Q|/\nu\rho$是无量纲的，在所讨论的问题中起雷诺数的作用．

首先让我们讨论收缩流动($Q<0$)．为了研究(23.9)—(23.11)的解，我们作以下假设：流动对于$\phi=0$的平面是对称的(即$u(\phi)=u(-\phi)$)；函数$u(\phi)$处处是负值(即各点的速度均指向角顶)；且由$\phi=\pm\alpha/2$处的$u=0$单调递减到$\phi=0$处的$u=-u_0<0$，所以u_0是$|u|$的最大值．这些假设将在下面得到证明．于是当$u=-u_0$时，一定有$du/d\phi=0$，由此可见，$u=-u_0$是(23.9)被积函数中根号下三次式的零点．所以可写出

$$-u^3-u^2+C_1u+C_2=(u-u_0)\{-u^2-(1-u_0)u+q\}.$$

其中q是另一常数．故有

$$2\phi=\pm\int_{-u_0}^{u}\frac{du}{\sqrt{(u+u_0)\{-u^2-(1-u_0)u+q\}}},\qquad(23.12)$$

常数u_0和q由下面两个条件确定

$$\alpha=\int_{-u_0}^{0}\frac{du}{\sqrt{(u+u_0)\{-u^2-(1-u_0)u+q\}}},$$

$$\frac{R}{6}=\int_{-u_0}^{0}\frac{udu}{\sqrt{(u+u_0)\{-u^2-(1-u_0)u+q\}}}\qquad(23.13)$$

($R=|Q|/\nu\rho$)；常数q必定是正数，否则这些积分就要成为复数．可以证明，对任意的R和$\alpha<\pi$，上二式都有解u_0和q．换句话说，对任意张角α和任意雷诺数而言，(图9的)收缩对称流动是可能的．我们来详细讨论R很大情况下的流动．这对应于u_0很大．(对$\phi>0$)方程(23.12)写成

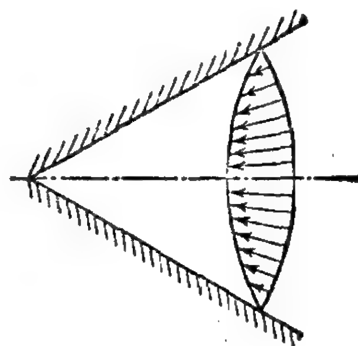


图 9

$$2\left(\frac{\alpha}{2}-\phi\right)=\int_{u}\frac{du}{\sqrt{(u+u_0)\{-u^2-(1-u_0)u+q\}}},$$

我们看出，如果 u 不接近于 u_0，则在整个积分区间上被积函数都很小．这表明，只有当 ϕ 接近于 $\alpha/2$ 时，也就是紧靠壁面附近时，$|u|$ 与 u_0 才会有显著差别①．换句话说，几乎对所有的角 ϕ 都有 $u\approx$ 常数 $=-u_0$；此外，由方程(23.13)，还有 $u_0=R/6\alpha$．速度 v 本身是 $|Q|/\rho\alpha r$，得出了无粘性的势流，其速度与角度无关而与 r 成反比．所以在大雷诺数下，收缩渠道中的流动与理想流体的势流几乎没有什么区别．只有在紧贴壁面的薄层之内，粘性效应才显示出来，那里速度由对应于势流的值迅速降到零(图 10)．

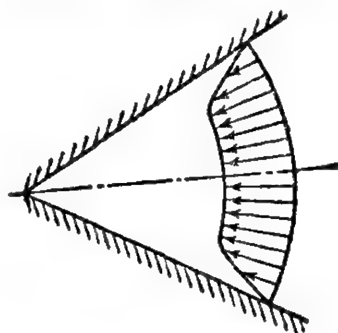


图 10

现在设 $Q>0$，从而出现扩张流动．我们首先还是假设流动对于平面 $\phi=0$ 是对称的，并且假设 $u(\phi)$(现在 $u>0$)从 $\phi=\pm\frac{\alpha}{2}$ 处的零单调增加到 $\phi=0$ 处的 $u_0>0$．代替(23.13)，现在有

$$\alpha=\int_0^{u_0}\frac{du}{\sqrt{(u_0-u)\{u^2+(1+u_0)u+q\}}},$$

$$\frac{R}{6}=\int_0^{u_0}\frac{udu}{\sqrt{(u_0-u)\{u^2+(1+u_0)u+q\}}}. \tag{23.14}$$

若把 u_0 看作是已知的，则 α 随 q 的减小而单调递增，并且当 $q=0$ 时达到最大值

$$\alpha_{\max}=\int_0^{u_0}\frac{du}{\sqrt{u(u_0-u)(u+u_0+1)}}.$$

另一方面，不难看出，对给定的 q，α 是 u_0 的单调递减函数．由此可见，若 α 给定，u_0 便是 q 的单调递减函数，它的最大值对应于 q

① 可能会问，即使 $u\approx-u_0$，这个积分又怎么能变大呢？回答是：当 u_0 很大时，$-u^2-(1-u_0)u+q=0$ 有一个根接近 $-u_0$，所以根式有两个几乎重合的零点，因而在 $u=-u_0$ 时，整个积分变得“几乎发散”。

$=0$，并由上面的方程给出．最大值 $R=R_{\max}$对应于最大值 u_0．利用代换

$$k^2=u_0/(1+2u_0),$$
$$u=u_0\cos^2 x,$$

我们可以用参数形式写出 $R_{\max}$ 对 α 的依赖关系

$$\alpha=2(1-2k^2)^{1/2}\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}},$$
$$R_{\max}=-6\alpha\frac{1-k^2}{1-2k^2}+\frac{12}{\sqrt{1-2k^2}}\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2 x}\,dx. \tag{23.15}$$

对于给定的张角而言，只有当雷诺数不超过一个确定值时，才可能有处处扩张的对称流动(图 11a)．当 $\alpha\to\pi(k\to0)$时，$R_{\max}\to0$；当 $\alpha\to0(k\to1/\sqrt{2})$时，$R_{\max}$ 按 $18.8/\alpha$ 的规律趋于无穷大．

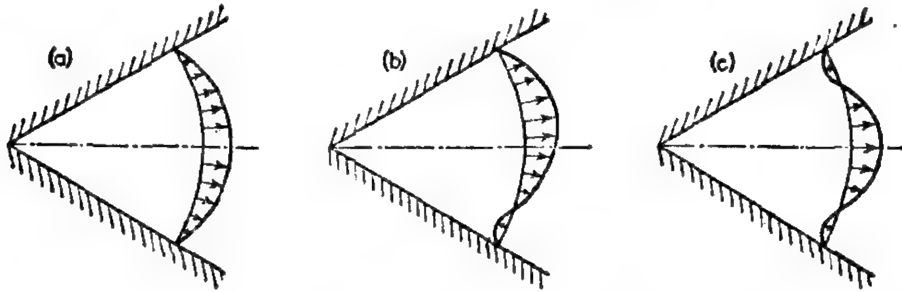


图 11

如果 $R>R_{\max}$，处处扩张的对称流的假设就不成立，因为条件(23.14)得不到满足．这时在角度$-\frac{\alpha}{2}\leqslant\phi\leqslant\frac{\alpha}{2}$的范围内，函数 $u(\phi)$必定有极大值或极小值．对应于这些极值的 $u(\phi)$值又必定是根号下多项式的零点．因此很清楚，在所讨论的范围内，三项式 $u^2+(1+u_0)u+q$(其中 $u_0>0$, $q>0$)必定有两个负实根，所以被开方函数可写成$(u_0-u)(u+u_0')(u+u_0'')$，这里 $u_0>0$, $u_0'>0$, $u_0''>0$；我们假设 $u_0'<u_0''$．显然，函数 $u(\phi)$可在 $u_0\geqslant u\geqslant -u_0'$ 范围内变化，$u=u_0$ 对应于 $u(\phi)$的正极大值，而$u=-u_0'$ 对应于负极小值．毋

须对这样求得的解进行详细研究，我们就可以指出，若 $R>R_{\max}$，会出现这样一个解，其中速度有一个极大值和一个极小值，流动对于平面 $\phi=0$ 是不对称的(图 11b)．当 R 进一步增大，会出现具有一个极小值和两个极大值的对称解(图 11c)，如此等等．因此，在这些解中，有向外和向内流动的两种区域(当然总流量 Q 是正的)．当 $R\to\infty$ 时，交替出现极小值和极大值的数目无限增加，所以没有确定的极限解．故可强调指出，在扩张流动中，当 $R\to\infty$ 时，解并不趋于欧拉方程的解，这与收缩流动是不同的．最后我们指出，上述这种类型的定常扩张流动，当 R 增大并超过 $R_{\max}$ 之后，很快变成不稳定的，实际上发生了非定常流或湍流(第三章)．

(3) 设一束射流，由一细管末端射出，进入充满着流体的无限空间，试确定其流动，——**浸没射流**问题．(朗道 1943)．

现取球坐标 r, θ, ϕ，以射流方向为极轴，并以射流出口点为原点．这种流动对于极轴是对称的，所以 $v_\phi=0$，且 v_θ, v_r 只是 r 和 θ 的函数．通过包围原点的任一封闭曲面(特别是通过无穷远处的封闭曲面)的总动量通量(即"射流动量")必须相等．因而速度必定与 r 成反比，所以

$$v_r=F(\theta)/r, \qquad v_\theta=f(\theta)/r, \tag{23.16}$$

这里 F 和 f 只是 θ 的某个函数．连续方程为

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2v_r)}{\partial r}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(v_\theta\sin\theta)=0.$$

于是我们得

$$F(\theta)=-\frac{df}{d\theta}-f\operatorname{ctg}\theta. \tag{23.17}$$

由于对称性，射流中动量通量密度张量的分量 $\Pi_{r\phi}$，$\Pi_{\theta\phi}$ 恒为零．我们假设分量 $\Pi_{\theta\theta}$ 和 $\Pi_{\phi\phi}$ 也为零；当我们求得满足全部必要条件的解时，就证明了这个假设是正确的．利用张量分量 σ_{ik} 的

表达式(15.17)和公式(23.16)，(23.17)，不难看出，射流内动量通量密度张量的各分量之间保持下列关系

$$\sin^2\theta\Pi_{r\theta}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\theta}[\sin^2\theta(\Pi_{\phi\phi}-\Pi_{\theta\theta})].$$

由此可见 $\Pi_{r\theta}=0$. 所以只有分量 Π_{rr} 不为零，并且它随$\frac{1}{r^2}$而变化. 容易看出，运动方程 $\partial\Pi_{ik}/\partial x_k=0$ 自动满足.

下面，我们写出

$$(\Pi_{\theta\theta}-\Pi_{\phi\phi})/\rho=(f^2+2\nu f\operatorname{ctg}\theta-2\nu f')/r^2=0,$$

或

$$d(1/f)/d\theta+(1/f)\operatorname{ctg}\theta+1/2\nu=0.$$

这个方程的解是

$$f=-2\nu\sin\theta/(A-\cos\theta), \tag{23.18}$$

于是由(23.17)我们有

$$F=2\nu\left[\frac{A^2-1}{(A-\cos\theta)^2}-1\right]. \tag{23.19}$$

由方程

$$\Pi_{\theta\theta}/\rho=p/\rho+f(f+2\nu\operatorname{ctg}\theta)/r^2=0,$$

可求得压力分布为

$$p=\frac{4\rho\nu^2(A\cos\theta-1)}{r^2(A-\cos\theta)^2}. \tag{23.20}$$

由射流的动量，即射流中的总动量通量，可求得常数 A. 这个通量等于球面上的积分

$$P=\oint\Pi_{rr}\cos\theta df=2\pi\int_0^\pi r^2\Pi_{rr}\cos\theta\sin\theta d\theta.$$

Π_{rr} 的值由下式给出

$$\frac{1}{\rho}\Pi_{rr}=\frac{4\nu^2}{r^2}\left[\frac{(A^2-1)^2}{(A-\cos\theta)^4}-\frac{A}{A-\cos\theta}\right],$$

将它代入积分，计算出

$$P=16\pi\nu^2\rho A\left[1+\frac{4}{3(A^2-1)}-\frac{1}{2}A\ln\frac{A+1}{A-1}\right]. \qquad (23.21)$$

公式(23.16)—(23.21)给出了这个问题的解①.

流线由方程 $dr/v_r=rd\theta/v_\theta$ 确定，对此方程进行积分，给出

$$r\sin^2\theta/(A-\cos\theta)=\text{常数}.$$

图 12 表示射流中的流线(对 $A>1$)

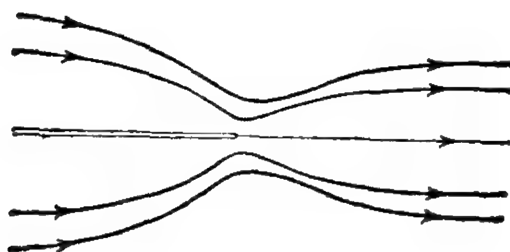


图 12

我们来考虑两种极限情形，即弱射流(动量 P 很小)和强射流(P 很大). 当 $P\to 0$ 时，常数 A 趋向无穷大，因为由(23.21)我们有 $P=16\pi\nu^2\rho/A$. 在这种情况下，速度为

$$v_\theta=-P\sin\theta/8\pi\nu\rho r,\quad v_r=P\cos\theta/4\pi\nu\rho r.$$

当 $P\to\infty$(强射流②)，A 趋向 1，因为(23.21)给出 $A=1+\alpha^2/2$，这里 $\alpha^2=64\pi\nu^2\rho/3P$，对于大角度($\theta\sim 1$)情形，速度由下式给出：

$$v_\theta=-(2\nu/r)\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2},\qquad v_r=-2\nu/r,$$

但对于小角度($\theta\sim\alpha$)情形，我们有

① 对于由点源射出的射流而言，这里所求得的解是精确的. 如果考虑到管口的有限尺寸，则这个解就是按管口尺寸与离管口距离r的比值而展开的幂级数的第一项. 正因为如此，所以如果我们由以上的解，来计算通过围绕原点的封闭曲面的总质量通量时，则所得结果为零. 当计入上述展开式中更多的项数时，则总质量通量不为零. 见 Ю. Б. Румер, Прикл. *Матем. и мех*, **16**, 255, (1952). Л. Г. 洛强斯基研究了角动量不为零的浸没层流射流(*Прикл. Матем. и мех.* **17**. 3 1953)

② 但应记住，在充分强的射流中，实际上流动是湍流(§35).

$$v_\theta = -\frac{4\nu\theta}{(\alpha^2+\theta^2)r}, \qquad v_r = \frac{8\nu\alpha^2}{(\alpha^2+\theta^2)^2 r}.$$

§ 24. 粘性流体中的振动运动

当浸在粘性流体中的固体振动时，由此引起的流动有许多特征性质. 为了研究这些性质，从一个简单而典型的例子开始较为适宜. 假设不可压缩流体以一无限大的固体平面作边界，这个固体平面以频率 ω 在它自身的平面内作简谐振动. 我们要确定这样所引起的流体的运动. 取固体平面为 yz 平面，流体区域为 $x>0$；y 轴与振动方向重合. 振动平面的速度 u 是时间的函数，具有 $A\cos(\omega t+\alpha)$ 的形式. 我们把它写作一个复变量的实部较为方便，即

$$u = \mathrm{re}(u_0 e^{-i\omega t}).$$

一般说来，这里常数 $u_0 = Ae^{-i\alpha}$ 是复数，但只要适当选择时间的起点，总能使它成为实数.

要是计算只涉及速度 u 的线性运算，我们就可以省去实部符号 re，而把 u 当作似乎就是复数进行运算，然后取其最后结果的实部. 于是可写成

$$u_y = u = u_0 e^{i\omega t}. \tag{24.1}$$

流体的速度必须满足 $x=0$ 处的边界条件 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}$，即 $v_x=v_z=0$，$v_y=u$.

由对称性可明显看出，所有的量将只依赖于坐标 x 和时间 t. 因此，从连续方程 $\nabla\cdot\boldsymbol{v}=0$ 我们有 $\frac{\partial v_x}{\partial x}=0$；由边界条件即得 $v_x=$ 常数 $=0$. 因为所有的量均与 y 和 z 无关，我们有 $(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} = v_x\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x}$；又因为 v_x 为零，我们得恒等式 $(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}=0$. 运动方程 (15.7) 变成

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}=-\frac{1}{\rho}\nabla p+\nu\triangle \boldsymbol{v}, \tag{24.2}$$

这是一个线性方程．它的 x 分量是 $\partial p/\partial x=0$，即 $p=$常数．

由对称性还可明显看出，各点的速度 $\boldsymbol{v}$ 都沿 y 方向．因 $v_y=v$，根据(24.2)我们有

$$\frac{\partial v}{\partial t}=\nu\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \tag{24.3}$$

这就是(一维的)导热方程．我们来求此方程关于 x 和 t 的周期解，其形式为

$$v=u_0e^{i(kx-\omega t)},$$

其中，复振幅为 u_0，所以在 $x=0$ 处 $v=u$．上式代入(24.3)我们得 $i\omega=\nu k^2$，因而

$$k=\sqrt{i\omega/\nu}=\pm(i+1)\sqrt{\omega/2\nu},$$

所以速度 v 为

$$v=u_0e^{-\sqrt{\omega/2\nu}x}e^{i[\sqrt{\omega/2\nu}x-\omega t]}; \tag{24.4}$$

这里所取的 k 使虚部为正，因为否则在流体里面速度将无限增加，这在物理上是不可能存在的．

所得的解代表横波，其速度 $v_y=v$ 垂直于传播方向．这种波最重要的特性是在流体内部迅速衰减；其振幅随着离固体表面的距离 x 的增加而依指数律减小①．

于是粘性流体中可能出现横波，但随着与产生这些波的固体平面的距离增大，这种波迅速衰减．

振幅减小到原有的 $1/e$ 时，波所经过的距离 δ 称为波的**穿透深度**．由(24.4)可知

$$\delta=\sqrt{2\nu/\omega)}, \tag{24.5}$$

所以穿透深度随着频率的增大而减小，但随着流体运动粘性系数

① 经过一个波长的距离，振幅减小到原有的 $1/e^{2\pi}\approx1/540$．

的增大而增大.

我们来计算在粘性流体中振动的固体平面单位面积上所作用的摩擦力. 显然,这个力沿 y 方向,且等于应力张量的分量 $\sigma_{xy}=\eta\partial v_y/\partial x$. 这里一定要在平面本身,即 $x=0$ 处取导数值. 将(24.4)代入,得

$$\sigma_{xy}=\sqrt{\frac{1}{2}\omega\eta\rho}\,(i-1)u. \tag{24.6}$$

设 u_0 是实数,并取(24.6)的实部,有

$$\sigma_{xy}=-\sqrt{\omega\eta\rho}\,u_0\cos(\omega t+\pi/4).$$

但振动表面的速度是 $u=u_0\cos\omega t$, 所以速度与摩擦力之间有一个相位差①.

不难算出上述问题中能量耗散的(时间)平均值. 这可借助普遍公式(16.3)进行;但在这种特殊情况下,将所需的耗散看作摩擦力做功来直接计算比较简单. 振动平面单位面积上单位时间内所耗散的能量等于力 σ_{xy} 和速度 $u_y=u$ 乘积的平均值

$$-\overline{\sigma_{xy}u}=\frac{1}{2}u_0^2\sqrt{\frac{1}{2}\omega\eta\rho}. \tag{24.7}$$

它与振动频率的平方根以及粘性系数的平方根成正比.

一个固体平面按任一规律 $u=u(t)$ 在自身平面内运动, 因而

---

① 对于半平面的振动(振动方向平行于它的边缘),由于边缘效应, 还有一个附加的摩擦力. 半平面振动引起粘性流体运动的问题,以及任意角度尖楔振动的更一般性问题,都可用方程

$$\triangle f-k^2f=0$$

的一类解来求解;在尖楔的衍射理论中,索末菲曾用过这类解,如见 M. von Laue, Interferenz und Beugung elektromagnetischer Wellen (电磁波的干涉和衍射), *Handbuch der Experimentalphysik*, 18, 333, Leipzig(1928).

在这里,我们只给出一个结果供参考,半平面上由边缘效应而增加的摩擦力,可看作是由于边缘移动一个距离 $\frac{1}{2}\delta=\sqrt{\nu/2\omega}$, 而使半平面面积增大的结果.

带动流体运动，对这个问题也可给出一个显式解．我们不打算在这里给出相应的计算，因为方程(24.3)所要求的解，在形式上与导热理论中类似问题的解是相同的，而导热问题将在§52中进行讨论(其解是公式(52.15))．特别是，作用在固体平面单位面积上的摩擦力是(参看(52.16))

$$\sigma_{xy}=\sqrt{\frac{\eta\rho}{\pi}}\int_{\infty}^{t}\frac{du(\tau)}{d\tau}\frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}. \tag{24.8}$$

现在来考虑任意形状物体振动的一般情况．在上述振动平面的情况下，流体运动方程中的一项 $(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}$ 恒等于零．当然，对于任意形状的曲面，不会出现这种情况．但我们假设这一项与其它项相比是个小量，因此可以略去．使这样处理保持有效的必要条件将在后面研究．

因此，像前面一样，我们将由线性方程(24.2)出发．对方程两边取旋度；因 $\nabla\times(\nabla p)$ 恒等于零，故得

$$\frac{\partial(\nabla\times\boldsymbol{v})}{\partial t}=\nu\triangle(\nabla\times\boldsymbol{v}), \tag{24.9}$$

即 $\nabla\times\boldsymbol{v}$ 满足导热方程．但前面已经看到满足这种方程的量是按指数律减小的．因此我们可以说，朝着流体纵深方向，速度旋度是不断减小的．换句话说，由物体振动所引起的流体运动，在物体周围某一层内是有旋的；而经过一个较大的距离，就迅速变成势流．有旋流穿透深度的量级为 $\delta\sim\sqrt{\nu/\omega}$．

这里可能有两个重要的极限情况，即量 δ 与振动物体的尺度相比可以是个大量，也可以是个小量．设物体尺度的量级为 l．首先考虑 $\delta\gg l$，即 $l^2\omega\ll\nu$ 的情形．除了这个条件以外，我们也假设雷诺数很小．若 a 是振动的幅度，则物体速度的量级为 $a\omega$．因此，这种运动的雷诺数是 $\omega al/\nu$．所以我们假设

$$l^2\omega\ll\nu,\qquad \omega al/\nu\ll 1. \tag{24.10}$$

这是低频振动情形,这种情况又意味着速度随时间缓慢地变化,因此我们可以在一般的运动方程中略去导数 $\partial \boldsymbol{v}/\partial t$. 另一方面,由于雷诺数是个小量,项$(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}$ 也可以略去.

从运动方程中去掉项 $\partial \boldsymbol{v}/\partial t$,就意味着流动是定常的. 因此,对 $\delta\gg l$,在任何给定的时刻,流动可看作是定常的. 这意味着在任何给定的时刻,流体的流动就好像是物体以该瞬时的速度作匀速运动所引起的流动. 例如,若我们讨论一个浸在流体中的球体,它以某一频率振动,而这个频率满足不等式(24.10)(现在 l 是球的半径);则我们可以说,作用在球体上的阻力,就是小雷诺数下球体匀速运动的斯托克斯公式(20.14)所给出的阻力.

现在考虑相反的情形,即 $l\gg\delta$. 为使项 $(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}$ 还能略去,振动的幅度与物体的尺度相比必须是个小量,因而有

$$l^2\omega\gg\nu,\qquad a\ll l; \tag{24.11}$$

应注意,在这种情况下,雷诺数不必是个小量. 估算一下$(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}$ 的大小,就得到了上述不等式. 算符$(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)$代表沿速度方向的微分运算. 但在物面附近,速度近乎切线方向. 在切线方向,只有经过物体尺度量级的距离,速度才有明显的改变. 因为速度本身是 $a\omega$ 的量级. 于是有

$$(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}\sim v^2/l\sim a^2\omega^2/l,$$

但导数 $\partial \boldsymbol{v}/\partial t$ 是 $v\omega\sim a\omega^2$ 量级. 把这些量比较一下,我们看出,若 $a\ll l$,则有

$$(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}\ll\partial \boldsymbol{v}/\partial t.$$

因而容易看出项 $\partial \boldsymbol{v}/\partial t$ 和 $\nu\triangle \boldsymbol{v}$ 量级相同.

现在可以讨论当条件(24.11)成立时,振动物体周围流动的性质. 在紧贴物体表面的薄层内,流动是有旋的,但在流体其余部分

内是势流①. 因而除了紧贴物体的薄层以外，各处的流动都由下列方程给出：

$$\nabla\times\boldsymbol{v}=0,\qquad \nabla\cdot\boldsymbol{v}=0, \tag{24.12}$$

由此可得 $\triangle\boldsymbol{v}=0$，而纳维-斯托克斯方程就化为欧拉方程. 因此除表面层以外，处处都是理想流体的流动. 由于这一层很薄，为确定其余部分流体的流动而解方程(24.12)时，我们本应把物体表面上必须满足的条件，即流体速度等于物体速度取作边界条件. 然而理想流体运动方程的解不能满足这些条件. 我们只能要求垂直于表面的流体速度分量的相应条件得到满足.

虽然方程(24.12)在流体表面层中是不适用的，但解这两个方程所求得的速度分布使法向速度分量满足了必要的边界条件. 因此追究表面附近这一分量的实际变化就没有多大意义. 解方程(24.12)得到的切向分量与物体速度的相应分量值会有所不同，然而这两个速度分量应该是相等的. 因此在表面层内，切向速度分量一定是迅速变化的. 这种变化的性质容易确定. 现在来考虑物体表面的任一部分，其尺度与 δ 相比是个大量，但与物体尺寸相比是个小量. 可把物体的这一部分表面近似当作平面，因而可用上述对平面情形所求得的结果. 设 x 轴指向所讨论的这部分表面的法向，y 轴平行于这部分表面的切向速度分量. 用 v_y 表示相对于物体的流体速度切向分量；在表面上，v_y 必须为零. 再者，将解方程(24.12)求得的 v_y 写成 $v_0{}^{-i\omega t}$. 由本节开头所得的结果，我们可以说，在表面层中，量 v_y 将按照

$$v_y=v_0e^{-i\omega t}\left[1-e^{-(1-i)x\sqrt{\omega/2\nu}}\right] \tag{24.13}$$

的规律，随着越来越接近表面而不断减小. 最后，单位时间内耗散

① 在平面振动的情况下，经过特征距离 δ 时，不仅 $\triangle\times\boldsymbol{v}$，而且 $\boldsymbol{v}$ 本身，都是按指数律减小. 这是因为振动平面不会排开流体，所以离平面较远的流体仍然保持静止. 在其它形状物体振动的情况下，要排开流体，并使流体产生运动，这时只有当经过的距离为物体尺度的量级时，速度才会显著减小.

的总能量由下列积分给出

$$\overline{E}_{动}=-\frac{1}{2}\sqrt{\rho\eta\omega/2}\oint|v_0|^2df, \tag{24.14}$$

积分区域是振动物体的全部表面.

本节后面的《问题》中，要计算在粘性流体中振动的各种物体所受的阻力. 这里我们先对这些力作以下一般的说明. 把物体的速度写成复数形式: $u=u_0e^{-i\omega t}$, 我们得阻力 F 正比于速度 u, $F=\beta u$ 也是复数，其中 $\beta=\beta_1+i\beta_2$ 是复常数. F 的表达式可写成带有实系数的两项之和:

$$F=(\beta_1+i\beta_2)u=\beta_1u-\beta_2\dot{u}/\omega, \tag{24.15}$$

一项正比于速度 u, 而另一项正比于加速度 $\dot{u}$.

能量耗散的时间平均值, 由阻力和速度乘积的平均值给出; 当然, 这里首先必须取上面给出的表达式的实部, 即

$$u=\frac{1}{2}(u_0e^{-i\omega t}+u_0^*e^{i\omega t}),$$

$$F=\frac{1}{2}(u_0\beta e^{-i\omega t}+u_0^*\beta^*e^{i\omega t}).$$

注意 $e^{\pm 2i\omega t}$ 的平均值是零, 我们得

$$\overline{Fu}=\frac{1}{4}(\beta+\beta^*)|u_0|^2=\frac{1}{2}\beta_1|u_0|^2. \tag{24.16}$$

由此看出, 能量耗散只是由 β 的实部产生的; 阻力(24.15)的相应部分, 即正比于速度的部分, 可称为**耗散部分**. 阻力的另一部分, 即正比于加速度并由 β 虚部确定的部分, 不涉及能量耗散, 可称为**惯性部分**.

对于在粘性流体中作旋转振动的物体，它所受的力矩也可用类似方法给出.

问　　题

问题 1. 设两个平行的固体平面之间夹一层粘性流体，其中的一个平面在自身平面内振动，试求作用在每个平面上的摩擦力.

解: 我们求方程(24.3)的以下形式的解①，

$$v=(A\sin kx+B\cos kx)e^{-i\omega t},$$

而由 $x=0$ 处，$v=u=u_0e^{-i\omega t}$; $x=h$ 处，$v=0$ 的条件确定 A 和 B，这里 h 是两平面的距离. 结果是

$$v=u\frac{\sin k(h-x)}{\sin kh}.$$

作用在运动平面单位面积上的摩擦力是

$$P_{1x}=\eta(\partial v/\partial x)_{x=0}=-\eta ku\operatorname{ctg}kh,$$

而作用在固定平面单位面积上的摩擦力是

$$P_{2x}=-\eta(\partial v/\partial x)_{x=h}=\eta ku\csc kh,$$

在这两个式子中，所有量都应理解为取其实部.

问题 2. 设有一个振动平面，上面有一层厚度为 h 的流体，流体的上表面是自由面，试求作用在平面上的摩擦力.

解: 固体平面上的边界条件为：在 $x=0$ 处，$v=u$; 自由面上的边界条件为：在 $x=h$ 处，$\sigma_{xy}=\eta\partial v/\partial x=0$. 我们得速度

$$v=u\frac{\cos k(h-x)}{\cos kh}.$$

摩擦力是

$$P_x=\eta(\partial v/\partial x)_{x=0}=\eta ku\operatorname{tg}kh.$$

问题3. 设有一直径为 R 的大平面圆盘，绕其轴作小振幅的旋转振动，转动角是 $\theta=\theta_0\cos\omega t$，其中 $\theta_0\ll 1$. 试求作用在圆盘上的摩擦力矩.

解: 对小振幅振动，无论频率 ω 如何，运动方程中的项 $(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}$ 与 $\partial\boldsymbol{v}/\partial t$ 相比总是小量. 若 $R\gg\delta$，则在求速度分布时，可把盘子看作是无限的. 现取柱坐标系，其 z 轴沿旋转轴方向；并求

$$v_r=v_z=0,$$

---

① 本节后面的各个问题中，δ 均表示(24.5)所给的量

$$\delta=\sqrt{2\nu/\omega},\qquad k=(1+i)/\delta.$$

$$v_\phi = v = r\Omega(z, t)$$

形式的解．我们得流体角速度 $\Omega(z, t)$ 的方程为

$$\partial\Omega/\partial t = \nu\partial^2\Omega/\partial z^2.$$

边界条件是：在 $z=0$ 处，$\Omega=-\omega\theta_0\sin\omega t$；在 $z=\infty$处，$\Omega=0$，求得方程的解为

$$\Omega=-\omega\theta_0 e^{-z/\delta}\sin(\omega t - z/\delta).$$

作用在圆盘两个侧面上的摩擦力矩为

$$M=2\int_0^R r\cdot 2\pi r\eta(\partial v/\partial z)_{z=0}dr$$
$$=\omega\theta_0\pi\sqrt{\omega\rho\eta}R^4\cos(\omega t-\pi/4).$$

问题4．设两个平行平面间的流体存在压力梯度，且压力梯度随时间作简谐变化，试确定这两平面间的流动．

解：把 xz 平面取在两个平面的正中间，x 轴平行于压力梯度方向．压力梯度写成

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=ae^{-i\omega t}.$$

速度处处都是沿 x 方向，并由以下方程确定，即

$$\frac{\partial v}{\partial t}=ae^{-i\omega t}+\nu\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}.$$

要满足条件：在 $y=\pm\frac{1}{2}h$ 处，$v=0$，方程的解为

$$v=\frac{ia}{\omega}e^{-i\omega t}\left[1-\frac{\cos ky}{\cos\frac{1}{2}kh}\right].$$

整个横截面上速度的平均值为

$$\bar{v}=\frac{ia}{\omega}e^{-i\omega t}\left(1-\frac{2}{kh}\operatorname{tg}\frac{1}{2}kh\right).$$

对 $h/\delta\ll1$ 情形，此式变成

$$\bar{v}\approx ae^{-i\omega t}h^2/12\nu,$$

与(17.5)相符．

若是 $h/\delta\gg1$ 的情形，则速度在整个截面上必定近于常数，只在很薄的表面层内有变化．根据这一事实，我们有

$$v\approx(ia/\omega)e^{-i\omega t}$$

问题5．设有一半径为 R 的球体，在流体中作平移振动，试求作用在球体

上的阻力.

解: 把球体的速度写成 $u=u_0e^{-i\omega t}$ 的形式. 像在 §20 中那样, 我们求

$$\boldsymbol{v}=e^{-i\omega t}\nabla\times(\nabla\times f\boldsymbol{u}_0)$$

形式的解, 这里 f 仅是 r 的函数(原点取在球心的瞬时位置). 把这种形式的解代入(24.9), 并作类似于 §20 中那样的变换, 我们得方程

$$\Delta^2 f+(i\omega/\nu)\Delta f=0$$

(代替 §20 中的方程 $\Delta^2 f=0$). 于是我们有

$$\Delta f=\text{常数}\times\frac{1}{r}e^{ikr},$$

所选择的解随 r 增大而指数地减小. 积分后可得

$$df/dr=[ae^{ikr}(r-1/ik)+b]/r^2; \tag{1}$$

我们不要求函数 f 本身, 因为在速度中只出现导数 f' 和 f''. 由 $r=R$ 处 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}$ 的条件确定(1)式中的 a 和 b, 得

$$a=-\frac{3R}{2ik}e^{-ikR},$$

$$b=-\frac{1}{2}R^3\left(1-\frac{3}{ikR}-\frac{3}{k^2R^2}\right). \tag{2}$$

应指出, 在物体尺寸较大情况下($R\gg\delta$), $a\to0$, 且 $b\to\frac{1}{2}R^3$, 这就是§10问题 2 中对势流所求得的值; 这与 §24 中所述情形是一致的.

阻力由公式(20.13)计算, 式中积分面积是取整个球面, 结果为

$$F=6\pi\eta R(1+R/\delta)u+3\pi R^2\sqrt{2\eta\rho/\omega}\left(1+\frac{2R}{9\delta}\right)\frac{du}{dt}. \tag{3}$$

对 $\omega=0$ 情形, 就变成斯托克斯公式, 而对高频情形, 我们有

$$F=\frac{2}{3}\pi\rho R^3\frac{du}{dt}+3\pi R^2\sqrt{2\eta\rho\omega}u,$$

式中第一项对应于绕球势流中的惯性力(见 §11 问题 1), 而第二项给出耗散力的极限值.

问题 6. 设有一按任意方式运动的球体, 其速度由函数 $u(t)$ 给出. 试求作用在球体上的阻力.

解: 把 $u(t)$ 表成傅里叶积分

$$u(t)=\int_{-\infty}^{\infty}u_\omega e^{-i\omega t}d\omega,$$

$$u_\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}u(\tau)e^{i\omega\tau}d\tau.$$

因为方程是线性的，所以总阻力可写为对应于各速度项的阻力的积分，而这些速度项就是各个傅里叶分量 $u_\omega e^{-i\omega t}$. 由问题 5 的式(3)可得这些阻力为

$$\pi\rho R^3u_\omega e^{-i\omega t}\left[\frac{6\nu}{R^2}-\frac{2i\omega}{3}+\frac{3\sqrt{2\nu}}{R}(1-i)\sqrt{\omega}\right].$$

注意到 $(du/dt)_\omega=-i\omega u_\omega$, 上式可写成

$$\pi\rho R^3e^{-i\omega t}\left[\frac{6\nu}{R^2}u_\omega+\frac{2}{3}(\dot{u})_\omega+\frac{3\sqrt{2\nu}}{R}(\dot{u})_\omega\frac{1+i}{\sqrt{\omega}}\right].$$

对整个 ω 区间积分，第一和第二项分别给出 $u(t)$ 和 $\dot{u}(t)$. 为了积分第三项，首先应注意，对负 ω 这一项必须写成复共轭形式，$(1+i)/\sqrt{\omega}$ 由 $(1-i)/\sqrt{|\omega|}$ 代替；这是因为问题 5 的公式(3)是对 $\omega>0$ 情形的速度 $u=u_0e^{-i\omega t}$ 导出的；而对速度 $u_0e^{i\omega t}$，我们求得的应是它的复共轭. 因此，可取 ω 从 0 到 ∞ 积分的实部的二倍，以代替从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 对整个 ω 区间积分. 可写成

$$2\mathrm{re}\left[(1+i)\int_0^{\infty}\frac{\dot{u}(\tau)_\omega e^{-i\omega t}}{\sqrt{\omega}}d\omega\right]=\frac{1}{\pi}\mathrm{re}\left[(1+i)\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{\dot{u}(\tau)e^{i\omega(\tau-t)}}{\sqrt{\omega}}d\omega d\tau\right].$$

$$=\frac{1}{\pi}\mathrm{re}\left[(1+i)\int_{-\infty}^{t}\int_0^{\infty}\frac{\dot{u}(\tau)e^{-i\omega(t-\tau)}}{\sqrt{\omega}}d\omega d\tau+(1+i)\int_t^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{\dot{u}(\tau)e^{i\omega(\tau-t)}}{\sqrt{\omega}}d\omega d\tau\right].$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\mathrm{re}\left[\int_{-\infty}^{t}\frac{\dot{u}(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}d\tau+i\int_t^{\infty}\frac{\dot{u}(\tau)}{\sqrt{\tau-t}}d\tau\right]=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{-\infty}^{t}\frac{\dot{u}(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}d\tau.$$

于是最后求得阻力

$$F=2\pi\rho R^3\left[\frac{1}{3}\frac{du}{dt}+\frac{3\nu u}{R^2}+\frac{3}{R}\sqrt{\frac{\nu}{\pi}}\int_{-\infty}^{t}\frac{du}{d\tau}\frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}\right].\tag{1}$$

问题 7. 设有一球体从时间 $t=0$ 开始匀加速运动，$u=\alpha t$，试求作用在球上的阻力.

解: 在问题 6 公式(1)中令 $t<0$ 时，$u=0$；而 $t>0$ 时，$u=\alpha t$，于是在 $t>0$ 时，我们有

$$F=2\pi\rho R^3\alpha\left[\frac{1}{3}+\frac{3\nu t}{R^2}+\frac{6}{R}\sqrt{\frac{t\nu}{\pi}}\right].$$

问题 8. 与上题相同，但球在一瞬间由静止变成匀速运动.

解: 我们有 $t<0$ 时 $u=0$；$t>0$ 时 $u=u_0$. 除了 $t=0$ 时刻(这时 du/dt

为无限大)以外，导数 $du/dt=0$；但 du/dt 对时间积分是有限的，且等于 u_0. 因此，对 $t>0$ 的所有时刻，结果为

$$F=6\pi\rho\nu Ru_0\left[1+\frac{R}{\sqrt{\pi\nu t}}\right]+\frac{2}{3}\pi\rho R^3u_0\delta(t),$$

这里 $\delta(t)$ 是 δ 函数. 当 $t\to\infty$ 时，此式渐近趋向于斯托克斯公式所给的值. $t=0$ 时作用在球上的脉冲阻力由上式末项的积分求得，并且等于 $\frac{2}{3}\pi\rho R^3u_0$.

问题9. 设有一球体在粘性流体中绕一直径作旋转振动，试求作用在球上的力矩.

解: 鉴于与 §20 问题 1 中相同的理由，可由运动方程中略去压力梯度项，故有 $\partial\boldsymbol{v}/\partial t=\nu\Delta\boldsymbol{v}$. 我们要寻求

$$\boldsymbol{v}=\nabla\times(f\boldsymbol{\Omega}_0e^{-i\omega t})$$

形式的解，这里

$$\Omega=\Omega_0e^{-i\omega t}$$

是球的旋转角速度. 于是得出关于 f 的方程，不是 $\Delta f=$常数，而是

$$\Delta f+k^2f=\text{常数}.$$

在这个方程的解中丢掉不重要的常数项，并取无穷远处为零的解，即得

$$f=\frac{a}{r}e^{ikr}.$$

常数 a 由球面上 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}$ 的边界条件确定. 结果是

$$f=\frac{R^3}{1-ikR}e^{ik(r-R)},$$

$$\boldsymbol{v}=(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r})\left(\frac{R}{r}\right)^3\frac{1-ikr}{1-ikR}e^{ik(r-R)},$$

其中 R 是球的半径. 类似 §20 问题 1 中的计算，可给出流体作用在球上的力矩为

$$M=-\frac{8}{3}\pi\eta R^3\Omega\,\frac{3-6R/\delta+6(R/\delta)^2+2(R/\delta)^3-2i(R/\delta)^2(1+R/\delta)}{1+2R/\delta+2(R/\delta)^2}.$$

若 $\omega\to0$(即 $\delta\to\infty$)，得 $M=-8\pi\eta R^3\Omega$，这对应于球的均匀旋转(见§20 问题 1). 在 $R/\delta\gg1$ 这个相反的极限情况下，得

$$M=\frac{4\sqrt{2}}{3}\pi R^4\sqrt{\eta\rho\omega}\,(i-1)\Omega.$$

这个式子也可由下述方法直接求得：在 $\delta\ll R$ 情形下，球的每一面元可看作是平面，把 $u=\Omega R\sin\theta$ 代入公式(24.6)，即得作用在面元上的摩擦力.

问题10. 设有一装满粘性流体的球壳，绕一直径作旋转振动，求作用在球壳上的力矩.

解： 我们寻求与问题 9 中形式相同的速度表达式. 把解 f 取为

$$f=\frac{a}{r}\sin kr$$

它在球内，包括球心，处处都是有限的. 由边界条件定出 a，即得

$$\boldsymbol{v}=(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r})\left(\frac{R}{r}\right)^3\frac{kr\cos kr-\sin kr}{kR\cos kR-\sin kR}.$$

经计算后，得出摩擦力矩的表达式如下：

$$M=\frac{8}{3}\pi\eta R^3\Omega\frac{k^2R^2\sin kR+3kR\cos kR-3\sin kR}{kR\cos kR-\sin kR}.$$

当然，对 $R/\delta\gg1$，极限值与上题的结果相同. 若 $R/\delta\ll1$，则有

$$M=\frac{8}{15}\pi\rho\omega R^5\Omega\left(i-\frac{R^2\omega}{35\nu}\right).$$

式中第一项对应于整个流体作刚性旋转而引起的惯性力.

§ 25. 重力波的阻尼

可把类似于前面的论述推进一步，用来研究流体自由面附近的速度分布. 我们来考虑表面附近出现的振动运动(例如重力波). 假设条件(24.11)仍成立，用波长 λ 代换线度 l 后，这些条件是：

$$\lambda^2\omega\gg\nu,\quad a\ll\lambda;\tag{25.1}$$

其中 a 是波的振幅，而 ω 是波的频率. 这时可以断言，只有在表面薄层内，流体才是有旋的；而在流体的其余各处则为势流，就像理想流体的运动一样.

在自由面上，粘性流体的运动必须满足边界条件(15.14)；这就要求速度对空间导数的某些组合应为零. 但解理想流体动力学方程组所得到的流动并不满足这些条件. 如上节讨论 v_y 那样，我们可以推断出，在薄的表面层内，相应的速度导数迅速减小. 值得注意的是，这并不表明表面层中速度梯度很大，这与固体表面附近

是不一样的.

我们来计算重力波中能量的耗散. 这里必须考虑的, 不单单是动能的耗散,而是机械能 $E_{机}$ 的耗散, 这包括动能和重力场中的势能两方面. 但是很清楚,重力场存在与否,不影响流体内摩擦过程引起的耗散. 因此 $\dot{E}_{机}$ 由同一公式(16.3)给出,

$$\dot{E}_{机}=-\frac{1}{2}\eta\int\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)^2 dV.$$

对重力波算这个积分时,必须注意,由于有旋流表面区域的体积很小,而这里速度梯度又不大,因而可不考虑这个区域的存在, 这与固体表面振动的情形又是不一样的. 换句话说, 所取的积分区域是全部流体体积;由此可知,可把整个流体当作像理想流体一样运动.

但理想流体重力波中的流动, 在 §12 中已经给出. 因为是势流

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_k}=\frac{\partial^2\phi}{\partial x_k\partial x_i}=\frac{\partial v_k}{\partial x_i},$$

所以

$$\dot{E}_{机}=-2\eta\int\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x_i\partial x_k}\right)^2 dV.$$

势 ϕ 的形式为

$$\phi=\phi_0\cos(kx-\omega t+\alpha)e^{-kz}.$$

当然, 我们关心的不是能量耗散的瞬时值, 而是对时间的平均值 $\overline{\dot{E}}_{机}$. 注意到正弦平方和余弦平方的平均值相同,我们得

$$\overline{\dot{E}}_{机}=-8\eta k^4\int\overline{\phi^2}dV. \qquad (25.2)$$

利用一个力学定理, 即在任一作小振动 (也就是小振幅的振动)的系统中,平均动能和势能相等, 由此可以算出重力波的机械能 $E_{机}$本身. 所以可简单地把 $\overline{E}_{机}$写成动能的两倍,

$$\bar{E}_{机}=\rho\int\overline{v^2}dV=\int\rho(\partial\phi/\partial x)^2dV,$$

因而

$$\bar{E}_{机}=2\rho k^2\int\overline{\phi^2}dV. \tag{25.3}$$

波的阻尼可方便地用阻尼系数 γ 来表征，它定义为

$$\gamma=|\overline{\dot{E}_{机}}|/2E_{机}. \tag{25.4}$$

在时间过程中，波的能量是按 $\bar{E}_{机}=$常数$\times e^{-2\gamma t}$ 的规律减小的. 这是因为能量是正比于振幅的平方，而振幅是随时间按 $e^{-\gamma t}$ 减小的.

利用(25.2)、(25.3)可得

$$\gamma=2\nu k^2$$

用(12.7)代入上式，即得重力波的阻尼系数为

$$\gamma=2\nu\omega^4/g^2 \tag{25.5}$$

问　　题

问题 1. 设有长重力波在等截面渠道中传播，其频率是这样大，以致 $\sqrt{\nu/\omega}$ 与渠道中流体深度相比是个小量，试求此重力波的阻尼系数.

解: 主要的能量耗散是发生在流体的表层，在这里速度由边界处的零变到波里面的值 $v=v_0e^{-i\omega t}$. 按 (24.14)，渠道中单位长度的平均能量耗散为 $l|v_0|^2\sqrt{\eta\rho\omega/8}$，这里 l 是渠道截面被流体所润湿部分的长度. 单位长的渠道中，流体的平均能量是$S\rho\overline{v^2}=\frac{1}{2}S\rho|v_0|^2$，这里 S 是渠道中流体的截面积. 阻尼系数是 $\gamma=l\sqrt{\nu\omega/8S^2}$. 所以，对矩形截面渠道，有

$$\gamma=\frac{2h+a}{2\sqrt{2ah}}\sqrt{\nu\omega},$$

其中 a 是宽度，h 是流体深度.

问题 2. 设重力波在很粘的流体上传播，试确定其中的流动.

解: 上面对阻尼系数的计算，只有当粘性系数很小，以致作为一阶近似可看作是理想流体的运动时，才是正确的. 对于任意粘性系数的情形，便需要求解下列运动方程

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial v_x}{\partial t}&=\nu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right)-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x},\\ \frac{\partial v_z}{\partial t}&=\nu\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right)-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}-g,\\ \frac{\partial v_x}{\partial x}&+\frac{\partial v_z}{\partial z}=0.\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

方程的解按 $e^{-i\omega t+ikx}$ 的规律而依赖于 t 和 x，并随着深入流体内部($z<0$)而不断变小．我们得

$$v_x=e^{-i\omega t+ikx}(Ae^{kz}+Be^{mz}),$$

$$v_z=e^{-i\omega t+ikx}\left(-iAe^{kz}-\frac{ik}{m}Be^{mz}\right),$$

$$\frac{p}{\rho}=e^{-i\omega t+ikx}\ \frac{\omega}{k}Ae^{kz}-gz$$

其中 $m=\sqrt{k^2-(i\omega/\nu)}$．流体表面的边界条件是

对 $z=\zeta$． $\qquad \sigma_{zz}=-p+2\eta\partial v_z/\partial z=0,$

$$\sigma_{xz}=\eta\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial x}\right)=0.$$

在第二个条件中，可直接用 $z=0$ 代替 $z=\zeta$．但对第一个条件，应先对 t 求微分，用 gv_z 代替 $g\partial\zeta/\partial t$，然后再令 $z=0$．最终得出关于 A 和 B 的两个齐次方程，由相容性条件可给出

$$\left(2-\frac{i\omega}{\nu k^2}\right)^2+\frac{g}{\nu^2k^3}=4\sqrt{1-\frac{i\omega}{\nu k^2}}.\tag{2}$$

这个方程给出了 ω 与波数 k 的函数关系．ω 是复数，它的实部给出振动频率，而它的虚部给出阻尼系数．方程(2)有物理意义的解是其虚部为负数的解(这对应于波的阻尼)；方程(2)只有两个根满足这个要求．若 $\nu k^2\ll\sqrt{gk}$(条件(25.1))，则阻尼系数较小，且方程(2)近似地给出 $\omega=\pm\sqrt{gk}-i2\nu k^2$，这个结果是我们早已知道的．在相反的极限情形下，$\nu k^2\gg\sqrt{gk}$．方程(2)有两个纯虚数根，对应于非周期性阻尼流动．一个根是 $\omega=-ig/2\nu k$，而另一个根很大(νk^2 量级)，因为它所对应的运动是强阻尼的，所以对它不感兴趣．

第三章　湍　　流

§ 26. 定常流动的稳定性

解粘性流体定常流动方程时，由于数学上的困难，往往需要作某些近似. 当然，这些近似解的适用性是有限的，例如 §20 中给出的绕圆球流动问题的解，就只适用于小雷诺数的情形.

但是在原则上，对于任何给定了定常外部条件的问题，流体动力学方程组一定存在着一个精确的稳定解；在 §17、§18 和 §23 中已经研究过这样的精确解. 这些解在形式上对所有的雷诺数都成立.

不过，并非运动方程组的每一个解(即使它是精确解)都能在自然界中真正实现. 在自然界中存在的流动，不仅必须服从流体动力学方程组，还必须是稳定的. 要成为稳定的流动，就必须使一度出现的小扰动能随着时间而衰减. 反之，若流动中不可避免地要出现的小扰动随着时间渐趋增大，则流动是绝对不稳定的. 这种对无限小的扰动都不稳定的流动是不可能存在的.

我们按下述方法对给定流动在无限小扰动下的稳定性问题进行数学研究. 在所讨论的定的常解上(设其速度分布为$\boldsymbol{v}_0(x, y, z)$)叠加上一个非定常的小扰动 $\boldsymbol{v}_1(x, y, z)$，$\boldsymbol{v}_1$ 必须使合速度 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_0+\boldsymbol{v}_1$ 满足运动方程组. 将速度 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_0+\boldsymbol{v}_1$ 和压力 $p=p_0+p_1$ 代入方程组

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}=-\frac{\nabla p}{\rho}+\nu\triangle\boldsymbol{v},$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{v}=0,$$

由此可得出关于 $\boldsymbol{v}_1$ 的方程. 其中已知函数 $\boldsymbol{v}_0$ 和 p_0 满足未经扰

动的方程组

$$(\boldsymbol{v}_0\cdot\nabla)\boldsymbol{v}_0=-\frac{\nabla p_0}{\rho}+\nu\triangle\boldsymbol{v}_0,$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{v}_0=0.$$

略去 $\boldsymbol{v}_1$ 一阶以上的项,得出

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\boldsymbol{v}_1}{\partial t}+(\boldsymbol{v}_0\cdot\nabla)\boldsymbol{v}_1+(\boldsymbol{v}_1\cdot\nabla)\boldsymbol{v}_0=-\frac{\nabla p_1}{\rho}+\nu\triangle\boldsymbol{v}_1,\\&\nabla\cdot\boldsymbol{v}_1=0.\end{aligned}\tag{26.1}$$

其边界条件为:在固定的固壁面上 $\boldsymbol{v}_1$ 为零.

因此,$\boldsymbol{v}_1$ 满足一线性微分方程组,其中系数只是坐标的函数,而与时间无关.这种方程组的通解可表示成一些特解之和,在这些特解中,$\boldsymbol{v}_1$ 对时间的依赖关系为 $e^{-i\omega t}$.扰动的"频率"ω 并不是任意的,而是通过在相应的边界条件下求解方程组(26.1)来确定的.一般说来"频率"是复数.如果 ω 的虚部是正数,则 $e^{-i\omega t}$ 将随着时间无限地增大.换句话说,这种小扰动一旦出现,就会不断地增强,即流动对这种小扰动是不稳定的.对于稳定的流动,其所有可能"频率"ω 的虚部必须都是负数.于是出现的小扰动将随时间按指数律衰减.

但是,稳定性的这种数学研究是极其复杂的.绕有限尺度物体的定常流动的稳定性理论问题,直到现在还没有解决.当雷诺数足够小时,定常流动肯定是稳定的.实验资料似乎表明:当 R 增加时,最终会达到这样一个值 $R_{临}$(**临界雷诺数**),超过它,流动在无限小的扰动下都是不稳定的.所以,在足够大的雷诺数($R>R_{临}$)情形下,绕固体的定常流动是不可能的.当然,临界雷诺数不是一个普适常数,而是对每一种类型的流动都有不同的值.这些值大约为 10 到 100 的量级,例如绕圆柱的流动中,在 $R=ud/\nu=34$ 时(其中 d 是圆柱的直径),已观测到不衰减的非定常流动.但是至今还没有作出 $R_{临}$的精确测量.

§ 27. 湍流的发生

在大雷诺数的情形下，定常流动的绝对不稳定性会产生出非定常流动，现在就来研究这种非定常流动的性质．我们从研究雷诺数仅仅稍大于$R_{临}$的这种流动的性质开始．当$R<R_{临}$时，对于所有可能的小的速度扰动，其复"频率"$\omega=\omega_1+i\gamma_1$的虚部都是负数($\gamma_1<0$)．当$R=R_{临}$时，出现一个虚部为零的频率．当$R>R_{临}$时，这个频率的虚部是正数，但是当$R$接近于$R_{临}$时，虚部$\gamma_1$远比实部$\omega_1$为小[①]．对应于这个频率的函数$\boldsymbol{v}_1$的形式为

$$\boldsymbol{v}_1=A(t)\boldsymbol{f}(x,y,z), \tag{27.1}$$

其中$\boldsymbol{f}$是坐标的某个复函数，而复"振幅"$A(t)$为[②]

$$A(t)=\text{常数}\times e^{\gamma_1 t}e^{-i\omega_1 t}. \tag{27.2}$$

不过只有在定常流动破坏后的一个短的时间间隔内，上述$A(t)$的表示式才是正确的；因为式中因子$e^{\gamma_1 t}$随着时间迅速增加，而且在§26中给出确定$\boldsymbol{v}_1$的方法——由此导出了(27.1)和(27.2)这类表示式——只有在$|\boldsymbol{v}_1|$很小时才能应用．当然，非定常流动振幅的模$|A|$实际上并不是无限制地增加的，而是趋向于一个有限的值．当R接近于$R_{临}$时(当然，我们总是指$R>R_{临}$)，这个有限值是很小的，并可以用下方法来确定．

让我们先来求出振幅平方$|A|^2$的时间导数．对于很小的t值，当(27.2)式仍然成立时，我们有$d|A|^2/dt=2\gamma_1|A|^2$．这个表达式实际上正好是A和A^*的幂级数展开式中的第一项．当模$|A|$增加时(仍然保持为小量)，则必需计及展开式中以后的项．第二项

---

① 必需记住：对于一个给定类型的流动，所有可能频率的集合(或频谱)既包含有分离的孤立值(分离谱)，也包含各种不同频率范围构成的整体(连续谱)．然而可以看出：我们感兴趣的具有正虚部的频率，一般只出现在分离谱中．

② 照例，这里我们理解为(27.2)的实部．

为 A 的三阶项. 但是我们对导数 $d|A|^2/dt$ 的精确值不感兴趣,而只对它的时间平均值有兴趣, 取平均值的时间间隔远大于因子 $e^{-i\omega_1 t}$ 的周期 $2\pi/\omega_1$; 我们知道,由于 $\omega_1 \gg \gamma_1$, 这个周期远小于振幅之模 $|A|$ 发生显著变化所需的时间 $1/\gamma_1$. 但是三阶项中必定包含这个周期因子, 因此其平均值为零①. 四阶项包含一个正比于 $A^2A^{*2}=|A|^4$ 的项,取平均值时, 它显然不为零. 于是准确到四阶项,有

$$\overline{d|A|^2/dt}=2\gamma_1|A|^2-\alpha|A|^4, \tag{27.3}$$

其中 α 可以是正数,也可以是负数.

我们假定 α 是正数②. 因为只在远小于 $1/\gamma_1$ 的时间间隔内取平均值, 所以没有在 $|A|^2$ 和 $|A|^4$ 上加一横. 根据同样的理由,在方程的求解过程中, 我们也略去了导数上的一横. 方程(27.3)的解为

$$1/|A|^2=\alpha/2\gamma_1+\text{常数}\times e^{-2\gamma_1 t}.$$

因此很清楚, $|A|^2$ 渐近地趋向于一个有限的极限:

$$|A|^2_{\max}=2\gamma_1/\alpha. \tag{27.4}$$

量 γ_1 是雷诺数的某个函数. 在 $R_{临}$附近, 它可以展开成 $R-R_{临}$的幂级数. 但是根据临界雷诺数的定义,有 $\gamma_1(R_{临})=0$. 因此展开式中的零阶项为零,于是取到一阶项,就有 $\gamma_1=\text{常数}\times(R-R_{临})$. 将上述一阶项代入式 (27.4), 则得振幅之模 $|A|$ 正比于 $R-R_{临}$ 的平方根:

$$|A|_{\max}\sim\sqrt{R-R_{临}}. \tag{27.5}$$

现在来总结一下上述结果: 当 $R>R_{临}$时, 流动的绝对不稳定性会导致非定常周期流动的出现. 当 R 接近于 $R_{临}$时, 以后的流动可

---

① 严格地说,在取平均值时,三阶项给出的不是零,而是四阶项, 我们假定它已包含在展开式的四阶项中.

② 对于通常的绕物体流动,似乎正是这样.

以表示成在原来的定常流动 $\boldsymbol{v}_0(x,\ y,\ z)$ 上叠加一个周期流动 $\boldsymbol{v}_1(x, y, z, t)$，$\boldsymbol{v}_1$ 的振幅很小，然而是有限的．这个振幅随着 R 的增加按正比于 $R-R_{临}$ 的平方根而增加．这一流动中的速度分布有如下形式：

$$\boldsymbol{v}_1 = f(x, y, z)e^{-i(\omega_1 t+\beta_1)} \tag{27.6}$$

其中 f 是坐标的复函数，β_1 是某个初位相．对于很大的 $R-R_{临}$，速度分成 $\boldsymbol{v}_0$ 和 $\boldsymbol{v}_1$ 就不再有意义了．此时只有某个频率为 ω_1 的周期流动．如果我们用位相 $\phi_1 \equiv \omega_1 t + \beta_1$ 来代替时间作为自变量，于是，可以说函数 $\boldsymbol{v}(x, y, z, \phi_1)$ 是 ϕ_1 的周期函数，其周期为 2π．但是这个函数不再是简单的三角函数了．函数 $\boldsymbol{v}(x, y, z, \phi_1)$ 的傅里叶级数展开式

$$\boldsymbol{v} = \sum_p A_p(x, y, z)e^{-i\phi_1 p} \tag{27.7}$$

（式中对所有正、负整数 p 求和）不仅包含有基频 ω_1 的项，而且也包含有频率为 ω_1 整数倍的项．

还需提到这个非定常流动的下述重要特性．方程(27.3)只确定了时间因子 $A(t)$ 的模，而不是它的位相．周期流动的位相 $\phi_1 = \omega_1 t + \beta_1$ 实质上仍然是未确定的，它取决于特定的初始条件，即流动开始时刻偶然出现的条件．根据这些条件，初位相 β_1 可以取任何值．因此，所讨论的周期流动并不是由产生此流动所给定的定常外部条件唯一确定的．有一个量——速度的初位相——仍然是任意的．可以说该流动有一个自由度，而由外部条件完全确定的定常流动就没有自由度．

现在来研究雷诺数进一步增加时所发生的现象．当雷诺数不断增加时，总会出现这样的时刻，上述周期流动又变得不稳定了。假如要研究这种不稳定性，可模仿上述确定原始定常流动不稳定

性的方法进行①. 现在, 未扰动流动的这部分取周期流动 $\boldsymbol{v}_0(x, y, z, t)$ (其频率为 ω_1), 以 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_0+\boldsymbol{v}_2$ 代入运动方程组, 其中 $\boldsymbol{v}_2$ 是一很小的修正量. 对于 $\boldsymbol{v}_2$, 我们又得到一线性方程, 但是现在线性方程的系数不仅是坐标的函数, 而且也是时间的函数, 同时是以 $2\pi/\omega_1$ 为周期的周期函数. 对于这样的方程, 必须寻找 $\boldsymbol{v}_2=\Pi(x, y, z, t)e^{-i\omega t}$ 形式的解, 其中 $\Pi(x, y, z, t)$ 是时间的周期函数, 它的周期为 $2\pi/\omega_1$. 当频率 $\omega=\omega_2+i\gamma_2$ 的虚部为正数时, 不稳定性再次出现, 这时相应的实部 ω_2 确定了新出现的频率.

因此, 结果是出现了以两个不同周期为特征的准周期流动. 正如在第一个周期流动出现之后流动具有一个自由度一样, 现在有两个任意的量(位相), 所以流动具有两个自由度.

当雷诺数继续增加时, 越来越多的新周期相继出现. 相继出现的两个新频率之间的雷诺数间隔迅速减小. 新流动自身的尺度越来越小. 也就是说, 这种流动出现得愈晚, 则其速度发生显著改变所需距离的量级就愈小②.

因此, 对于 $R>R_{临}$的情况, 流动很快地变得复杂而且混乱. 这种流动称为**湍流**, 其性质将在下面几节中详细地加以研究. 与湍流截然不同的是规则的流动, 即流体看起来是以各种不相同的速度、层次分明地运动, 这种流动称为**层流**.

---

① 但是, 由于在数学上非常困难, 即使对于特殊的情形也还没有研究出来.

② 这种由于新周期流动相继出现而导致湍流的思想是有问题的. 在本书出版之后, 许多研究工作表明: 无论在理论上还是在实验中, 都发现湍流过渡可以是突然发生的. 同时, 本节下面关于湍流有准周期特性的推测也是有问题的. 已发现超临界分叉解可以不是准周期的. 但是本书中有关分叉解集合的某些基本概念, 在分叉理论的新近结果中可以找到一定的依据, 所以还是可取的. 有关这方面的详细论述, 读者可查阅: D. D. Joseph, *Stability of Fluid Mechanics*, Springer-Verlag, 1976, Vol. 1, §16. ——中译者注.

我们可以写出函数 $v(x,y,z,t)$ 的一般形式，它对时间的依赖关系由某 n 个不同的频率 $\omega_j(j=1,2,\cdots,n)$ 给出．现在不再是一个位相 $\phi_1=\omega_1 t+\beta_1$ 了，而是有 n 个不同的位相 $\phi_j=\omega_j t+\beta_j$. 函数 v 可以认为是这些位相(以及坐标)的函数，而且对于每一个位相来说都是以 2π 为周期．这个函数可以写成一个级数：

$$v(x,y,z,t)=\sum_{p_1,p_2,\cdots,p_n} A_{p_1,p_2,\cdots,p_n}(x,y,z)\exp\left[-i\sum_{j=1}^{n}p_j\phi_j\right], \tag{27.8}$$

上式对所有整数 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 求和．这是公式(27.7)的推广．由(27.8)式可以指出：基频 $\omega_1,\cdots,\omega_n$ 本身的选取不是唯一的；任何 n 个由 ω_j 组成的整系数的线性组合，只要是独立的，都可以作为一组基频①.

由式(27.8)这类式子所描写的流动具有 n 个自由度；它包含 n 个任意的初位相 β_j. 当雷诺数增加时，频率的个数和自由度数均增加．在 R 趋向于无限的极限情形下，自由度数也无限地增加.

必须记住，因为速度是位相的周期函数，其周期为 2π，所以位相只差 2π 整数倍的两个状态实际上并没有差别．换句话说，可以认为各个位相所有本质上不同的值都在 $0\leqslant\phi_j\leqslant 2\pi$ 的范围内．让我们来研究任何两个位相 $\phi_1=\omega_1 t+\beta_1$ 和 $\phi_2=\omega_2 t+\beta_2$. 设在某时刻 ϕ_1 的值为 α，那末根据刚才所说的理由，则在所有 $t=(\alpha-\beta_1+2\pi r)/\omega_1$ 的时刻，ϕ_1 的值都等于 α，其中 r 是任意整数．在这些时刻上，位相 ϕ_2 的值为

$$\phi_2=\omega_2(\alpha-\beta_1)/\omega_1+\beta_2+2\pi r\omega_2/\omega_1.$$

不同的频率通常是不可通约的，所以 ω_2/ω_1 是一个无理数．如果

① 这些线性组合必须能够得出所有可能的数 $\Sigma p_j\phi_j$. 容易看出：要做到这一点，联系新、老频率之间的变换系数行列式必定为一.

我们从 ϕ_2 的各个值中减去适当的 2π 的整数倍，从而使它落入 0 到 2π 的范围内，则当 r 从 0 变到 ∞ 时，我们会得到这样一些 ϕ_2 的值，它们可以任意地接近 0 到 2π 中任何给定的值. 换句话说，在足够长的时间过程中，ϕ_1 和 ϕ_2 将同时任意地接近于任何一对已给的值. 显然，对于所有位相都是这样. 所以湍流运动有一定的准周期性：即在足够长的时间过程中(比如一个准周期)流体所经历的状态总可以任意地接近任一给定状态，该状态由可以同时选取的一组位相值 ϕ_j 所确定①.

我们已经介绍过临界雷诺数的概念，在前面所说的意义上，它是定常流动首次出现不稳定性时的 R 值. 但是，也可以从稍微不同的观点来解释临界雷诺数. 当 $R<R_{临}$ 时，运动方程组不存在不随时间衰减的稳定的非定常解. 而在达到临界雷诺数以后，运动方程组出现了稳定的非定常解，而且这个稳定的非定常解将实际上出现在运动流体中.

就通常绕有限物体流动的实验研究而论，$R_{临}$ 的两种定义似乎是一样的. 然而在逻辑上却不必如此，所以在原则上可能存在着出现两个不同的临界值的情形：一个是超过此临界值之后，就能发生不衰减的非定常流动；另一个则是超过此临界值之后，定常流动变为绝对不稳定的. 显然第二个值必定大于第一个值. 但是，由于现在还没有迹象表明不稳定性的这种情形确实存在，所以我们就不再对它们作更细致的研究了②.

§ 28. 旋转圆柱面之间流动的稳定性

在雷诺数非常大的极限情形下，为了研究两个旋转圆柱面之

① 为了便于理解，中文翻译时加了括号中的文字. ——中译者注.

② 在这里我们没有涉及(例如)管道流动，管道中流动稳定性的丧失有其独特的性质(见 §29).

间定常流动的稳定性(§18)，我们可以采用一种类似于§4中的简单方法，在那里，用它得出了重力场中静止流体的力学稳定性条件(瑞利，L.Rayleigh，1916).这个方法的原理是：研究任一小的流体元，假定它偏离了原有运动的轨道. 由于这一位移的结果，出现了作用在位移后的流体元上的力. 如果原有流动是稳定的，这些力必需迫使流体元回到它原有的轨道上去.

在未经扰动的流动中，各流体元均沿着以圆柱面轴线为中心、以 $r=$常数为半径的圆周运动. 设 $\mu(r)=mr^2\dot{\phi}$ 是质量为 m 的流体元的角动量，其中 $\dot{\phi}$ 是角速度. 则作用在该流体元上的离心力为 μ^2/mr^3；这一离心力与旋转流体中的径向压力梯度相平衡. 现在假定到轴线距离为 r_0 的流体元稍稍偏离了它原有的轨道，移动到了离轴线距离为 $r>r_0$ 的地方，流体元的角动量仍旧等于它原有的值 $\mu_0=\mu(r_0)$. 而在新位置上作用在流体元上的离心力为 μ_0^2/mr^3. 为了使流体元回到它的原有轨道上去，这一离心力必须小于在距离 r 上与压力梯度相平衡的值 μ^2/mr^3. 因此稳定的必要条件是 $\mu^2-\mu_0^2>0$. 将 $\mu(r)$ 展成正差值 $r-r_0$ 的幂级数，于是可以把上述条件写为

$$\mu d\mu/dr>0. \tag{28.1}$$

根据公式(18.3)，运动流体质点的角速度 $\dot{\phi}$ 为

$$\dot{\phi}=\frac{\Omega_2R_2^2-\Omega_1R_1^2}{R_2^2-R_1^2}+\frac{(\Omega_1-\Omega_2)R_1^2R_2^2}{R_2^2-R_1^2}\cdot\frac{1}{r^2}.$$

我们计算 $\mu=mr^2\dot{\phi}$，并略去肯定大于零的因子，则条件(28.1)可以写成

$$(\Omega_2R_2^2-\Omega_1R_1^2)\dot{\phi}>0. \tag{28.2}$$

角速度 $\dot{\phi}$ 单调地从内圆柱面上的 Ω_1 变化到外圆柱面上的 Ω_2. 如果两个圆柱面的旋转方向相反，即 Ω_1 和 Ω_2 有相反的符号，则函数 $\dot{\phi}$ 在两个圆柱面之间就要改变正负号，于是 $\dot{\phi}$ 和常数 $\Omega_2R_2^2-\Omega_1R_1^2$ 的乘积就不能处处是正的. 因此在这种情形下，式

(28.2)就不能在流体中所有的点上成立，所以流动是不稳定的.

现在设两个圆柱面是同向转动的；取这一转动的方向为正方向，则有 $\Omega_1>0, \Omega_2>0$. 于是 $\dot{\phi}$ 处处是正的，为了满足条件(28.2)，必须要

$$\Omega_2 R_2^2 > \Omega_1 R_1^2. \tag{28.3}$$

如果 $\Omega_2 R_2^2 < \Omega_1 R_1^2$，则流动是不稳定的. 例如，如果外圆柱面处于静止($\Omega_2=0$)而内圆柱面旋转时，流动就是不稳定的. 另一方面，如果内圆柱面是静止的($\Omega_1=0$)，则流动是稳定的.

必须强调指出：在以上的讨论中，丝毫未计及流体元移动时的粘性力影响. 所以，这个方法只能适用于小粘性的情形，即 R 很大的情形.

为了研究 R 为任意值时流动的稳定性，必须采用从方程组(26.1)出发的一般方法(泰勒，G.I. Taylor, 1923). 在现在的情形下，未经扰动的速度分布 $\boldsymbol{v}_0$ 只依赖于(柱坐标的)径向坐标 r，而与角度 ϕ 和轴向坐标 z 无关. 于是我们得到扰动速度 $\boldsymbol{v}_1$ 的线性方程组，其系数既不包含时间也不包含坐标 ϕ 和 z. 我们可以寻求此方程组的如下形式的解

$$\boldsymbol{v}_1 = e^{i(kz-\omega t)} \boldsymbol{f}(r), \tag{28.4}$$

其中矢量 $\boldsymbol{f}$ 的方向是任意的；这个解通过周期因子 e^{ikz} 而依赖于 z，同时波数 k 将确定扰动沿 z 方向的周期性. 在垂直于轴线的平面上满足必要的边界条件(在 $r=R_1$ 和 $r=R_2$ 时，$\boldsymbol{v}_1=0$)下求解方程组，所得到的可能的频率 ω 将是以 R 为参数的 k 的函数：$\omega=\omega(k,R)$. 找出使函数 $\gamma_1=\mathrm{Im}(\omega)$ 对某个 k 首先变为零的 R 值，就确定了不稳定性开始出现的条件. 当 $R<R_{临}$ 时，函数 $\gamma_1(k,R)$ 总是负的，但是当 $R>R_{临}$ 时，则在 k 的某个范围中有 $\gamma_1>0$. 设 $k_{临}$ 是当 $R=R_{临}$ 时使 $\gamma_1=0$ 的 k 值. 在原有流动不再稳定的那一瞬间，相应的函数(28.4)就给出了在流体中出现的(叠加在原有流动

上的）流动特性；这一流动沿圆柱面轴向是周期性的，其波长为 $2\pi/k_{临}$①.

所讨论的方程组不仅有不依赖于角度 ϕ 的形如(28.4)的解，而且还有这样的解，v_1 中包含有因子 $e^{im\phi}$，其中 m 是一整数．但是我们只对首先出现不稳定性的解感兴趣，因此从未对 $m\neq 0$ 的解作过这方面的研究．假定不稳定性首先出现在 $m=0$ 的扰动中还是很自然的，这个推测已完全为实验结果所证实．

同时必需注意到：即使给定了 k 值，式(28.4)形式的解也不是唯一的．一般说来，对应于一个给定的 k 值，有许多个具有不同 ω 的解．我们也只对其中给出 $R_{临}$的最小值那种解感兴趣．

我们发现，纯虚数函数 $\omega(k)$ 对应于给出最小 $R_{临}$的解．因此当 $k=k_{临}$时，不仅 $\mathrm{Im}(\omega)$ 为零，而且 ω 本身也为零．这意味着旋转圆柱面之间定常流动的首次不稳定性将导致另一个定常流动的出现．

由于计算极其复杂②，只对圆柱面之间间隔很小($R_2-R_1\ll R_2$)的情形得到了数值结果．图 13 表示了由一条曲线把不稳定流动(阴影部分)和稳定流动区域分开的例子．曲线的右半支相应于两圆柱面旋转的方向相同，它以直线 $\Omega_2R_2^2=\Omega_1R_1^2$ 为渐近线．对于给定类型的流动，当雷诺数增加时，$\Omega_1R_1^2/\nu$ 和 $\Omega_2R_2^2/\nu$ 都按同一倍数增加．这在图 13 中相应于沿着过原点且有给定斜率的一条直线向上移动．在图的右半部分（Ω_1 和 Ω_2 都是正的），凡是

---

① 当 R 稍大于 $R_{临}$时，使 $\mathrm{Im}(\omega)>0$ 的 k 值不只是一个，而是一个整个的范围．但是，不要以为最后的流动是各种周期流动的叠加．实际上对每一个 R 的值，都将出现一个有确定周期的流动，它使得整个流动趋向于稳定．不过，这个周期不能由线性化方程组(26.1)来确定．

② 更为详细的讨论可查阅：C. C. Lin(林家翘)，*The Theory of Hydrodynamic Stability*, Cambridge, 1955.

$\Omega_2R_2^2/\Omega_1R_1^2>1$ 的所有上述直线都与不稳定区域的边界曲线不相交. 另一方面, 凡是$\Omega_2R_2^2/\Omega_1R_1^2<1$ 的所有上述直线, 当雷诺数足够大时都要进入不稳定性区域, 这与条件(28.3)相一致. 在图的左半部分(Ω_1 和 Ω_2 反号), 任何通过原点的直线, 最后都将与不稳定性区域的边界曲线相交, 即对于任何 $\Omega_2R_2^2/\Omega_1R_1^2$ 的比值, 流动都会变成不稳定的, 这也和上面得到的结果相一致. 对于 $\Omega_2=0$ (当只有内圆柱面旋转时)的情形, 不稳定性开始于

$$\Omega_1=41.3\nu/h\sqrt{hR_2}, \tag{28.5}$$

其中 $h=R_2-R_1$.

但是在图 13 的非阴影部分中, 流动的稳定性并不意味着下面的结论成立, 即无论 R 变得多大, 流动在实际上仍然是定常的. 实验表明有一个界限, 超过了这个界限, 便可能出现稳定的非定常流动. 在这个区域中, 定常流动是"亚稳的": 即对于小的扰动是稳定的, 但是对于大的扰动是不稳定的. 由于上述的扰动, 如果在沿圆柱轴的某个区域内出现了非定常流动, 它将接着"排除"整个区域中的层流流动. 这种非定常流动一出现就有极大的"自由度"(在§27 中所说明的意义上), 即它是充分发展的湍流.

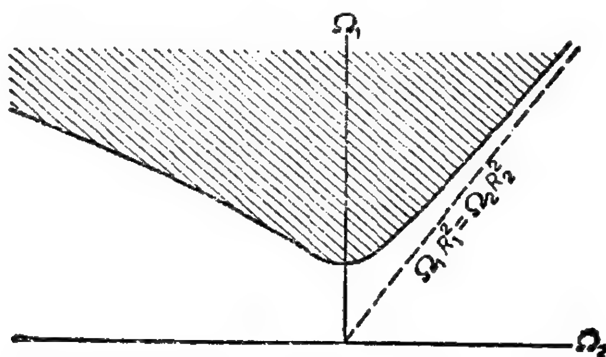


图 13

在图 13 的阴影部分中, 当雷诺数足够大时, 流动也将变成湍流, 但是关于这种湍流出现的过程几乎还没有什么资料.

两个旋转圆柱面之间流动的一个极限情形是两个作相对运动

的平行平板之间的流动（见§17），这相当于两个旋转圆柱面的半径非常大而且间隔 $h=R_2-R_1$ 非常小的情形。对于任何 $R=Uh/\nu$ 的值(其中 U 是两平板的相对速度)，这种流动对无限小的扰动都是稳定的。然而在 R 的值约大于 1500 时，稳定的湍流运动就可能发生了。

§ 29. 管道中流动的稳定性

§17 所讨论的管道中的定常流动，它会以不寻常的方式失去其稳定性。由于流动沿 x 方向(沿管向)是均匀的，所以未受扰动的速度分布 $\boldsymbol{v}_0$ 与 x 无关。仿照§28中的方法，我们可以寻求方程组(26.1)的如下形式的解:

$$\boldsymbol{v}_1=e^{i(kx-\omega t)}\boldsymbol{f}(y,z).\quad(29.1)$$

这里也存在一个 $R=R_{临}$的值，它使得 $\gamma_1=\mathrm{Im}(\omega)$在某一$k$ 值上最先为零。但是重要的是，现在函数 $\omega(k)$的实部不为零。

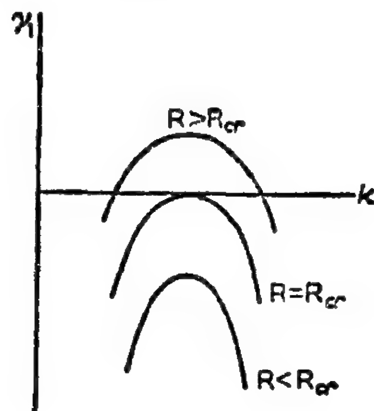


图 14

当 R 的值只稍稍大于 $R_{临}$时，使 $\gamma_1(k)>0$ 的 k 值范围很小，这时 k 值是在 $\gamma_1(k)$达到最大值(即 $d\gamma_1/dk=0$)的点的附近(见图 14)。设有微小的扰动发生在流动中的某个部分，它是由一系列如式(29.1)形式的分量叠加而成的波包。在时间过程中，$\gamma_1(k)>0$ 的分量将增强，而其余的分量将衰减。这样形成的加强波包也同时顺流而下，其速度等于波包的群速度 $d\omega/dk$；由于我们现在所研究的波的波数是在 $d\gamma_1/dk=0$ 的点附近的小范围内，所以量 $d\omega/dk\approx d\omega_1/dk$ 是实数，因此它就是波包的实际传播速度。

扰动向下游移动这一事实是很重要的，它会使稳定性的丧失变得完全不同于 §28 的情形。

我们已经知道，旋转圆柱面之间的流动在$R>R_{临}$时(这时有$\mathrm{Im}(\omega)>0$的频率)，原有的定常流动已不再可能了，因为即使是微小的扰动也将增强到有限振幅．然而对于管道中的流动，扰动在增强的同时还伴随着向下游的移动；当我们研究管道中给定点上的流动时，发现扰动并不是增强而是衰减的．还必须指出，由于实际中的管道无论多长也总是有限的，所以任何扰动在它破坏层流流动之前，可能已经排出管外了．因此，即使$R>R_{临}$，管道中的定常流动对于小扰动也是相当稳定的，并且对于远远超过$R_{临}$的R值，管道中的定常流动在原则上还可以存在．

既然扰动是随坐标x(指向下游)而增强，并不是在给定点上随时间而增强，所以可采用下述方法来研究这类不稳定性．设想在给定的点上连续不断地给流动以特定频率ω的扰动，同时研究扰动顺流而下所发生的情形．由函数$\omega=\omega(k)$便可反算出什么波数对应于给定的(实数)频率．如果$\mathrm{Im}(k)>0$，则因子e^{ikx}随x的增加而增加，即扰动向下游是增强的．在ω, R平面上，由方程$\mathrm{Im}[k(\omega, R)]=0$给出的曲线确定了稳定性的区域，并且对于每一个$R$值，该曲线可以区分出向下游是增强或是衰减的扰动频率．

实际的计算是极其复杂的．只对两平行平板之间的流动作出了全面的研究(林家翘，1946)①．不过有理由推测圆管中的流动在定性上也将有同样的结果．

在图15中简略地画出了关于两平板之间流动的界限曲线，曲线内的阴影部分是不稳定的区域．当$R\to\infty$时，曲线的两个分支都逐渐地趋向于R轴②．关于不衰减扰动能够存在的最小R值，

---

① 详细的计算见 C. C. Lin(林家翘)，*The Theory of Hydrodynamic Stability*, Cambridge, 1955.

② 当R很大时，两个分支的渐近方程为$\omega h/U=5.0/R^{3/21}$和$\omega h/U=11.2/R^{3/2}$.

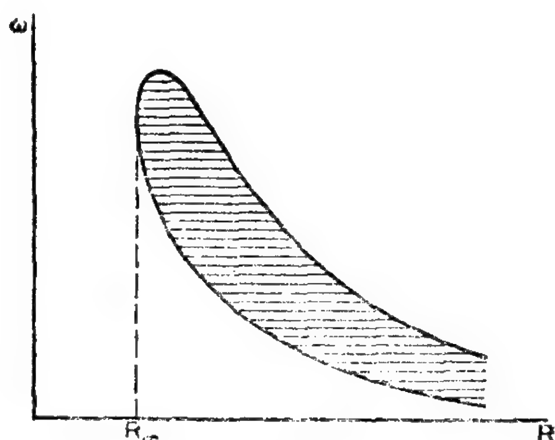


图 15

我们通过计算,求得为 $R_{临}\approx 7700$,这里 R 定义为 Uh/ν, 其中 h 是两平板之间的距离, U 是这个距离上流体的平均速度.

因此,对于数值在零和某个最大值之间的任何频率,都存在一个 R 值的有限范围, 在 R 的这个范围内, 该频率的扰动将是增强的. 值得注意的是:与严格的理想流体的情况作比较,流体的小而有限的粘性在某种意义上起到破坏稳定性的作用. 因为当 $R\to\infty$ 时,任何有限频率的扰动都将衰减掉, 但是当引进有限的粘性时,结果却进入了不稳定的区域;再进一步增加粘性时,最后又将走出不稳定的区域.

然而这些计算并没有回答这样的问题:当 R 足够大时,对于无限小的扰动,管道中的流动是否总是会出现真正的不稳定性,即在给定点上由于扰动随时间的增强而引起的不稳定性. 我们将扼要地说明这种不稳定性在数学上的含义. 现在来研究某个小扰动,它在 $t=0$ 时出现在一个有限的区域中. 将小扰动对 x 展成傅里叶积分,可以写成

$$\iint f(\xi)e^{ik(x-\xi)}d\xi dk,$$

其中 $f(x)$ 是描写初始扰动的函数. 在时间过程中,扰动的每一个傅里叶分量将随 $e^{-i\omega t}$ 而变化,其频率为 $\omega=\omega(k,R)$, 所以 t 时刻

的整个扰动由积分

$$\iint f(\xi)e^{ik(x-\xi)-i\omega t}d\xi dk$$

给出. 因为除了一个有限的区域(初始扰动区域)之外, $f(x)$均为零,所以 $x-\xi$ 有一个有限的取值范围. 因此 t 很大时的积分性质主要由积分

$$\int e^{-i\omega(k)t}dk$$

来确定. 如果这个积分随时间的增加而趋向无穷, 那么流动实际上是绝对不稳定的.

直到现在,即使是对于特殊的情形也还没有作过这样的研究. 但是根据有关管道中流动的实验结果,我们有理由认为:不管是什么样的 R 值, 对于任意的小扰动都不存在真实的不稳定性. 下面的事实说明了这一点,即越是小心地避免管道入口处的扰动,则能够观测到层流流动的雷诺数就越大①.

但是实验结果也表明存在着另一个临界雷诺数 (我们把它记作 $R'_{临}$);它确定了这样的界限,即超过这个界限时, 稳定的非定常流动能够存在(参阅 §27 的末尾). 如果在管道中的任何一段上出现湍流,则当 $R<R'_{临}$时,湍流区域将移向下游, 同时减小其尺度直至完全消失;反之,当 $R>R'_{临}$时, 湍流区域将在时间过程中扩展到越来越多的区域. 如果对流动的扰动在管道入口处连续不断地产生,则当 $R<R'_{临}$时,不管扰动在开始时有多么强, 都将在管道下游的某个距离上衰减掉. 反之,当 $R>R'_{临}$时,则在整个管道中都会变成湍流. 这可以通过扰动来实现, 而且 R 越大, 所需的扰动就越弱②. 因此管道中当 $R>R'_{临}$时的层流流动是亚稳的, 即对于有限

① 实际上已经观测到的层流流动的雷诺数已达到 $R\doteq 50,000$, 其中 $R=Ud/\nu$, d 是管道的直径, U 是横截面上的平均速度.

② 对于圆截面的管道, $R'_{临}$在1600 和 1700 之间. 对于两平行平板之间的流动, 则从 $R=1400$ 开始就已观测到湍流.

强度的扰动是不稳定的；而且 R 越大，所需扰动的强度越小.

如在 §28 末尾所指出的那样，亚稳层流因被破坏而引起的非定常流动，已经是完全发展了的湍流. 在这个意义上，管道中湍流的出现与绕有限尺寸物体定常流动中湍流的出现在本质上是不同的，后者是由于定常流动的绝对不稳定性所引起的. 在绕流的情形中，当雷诺数 R 通过 $R_{临}$时，非定常流动似乎是以连续的方式出现的，即逐渐地增加流动的自由度数目(如 §26 和 §27 所阐明的那样). 但是对于管道中流动的情形，湍流是以不连续的方式出现的. 特别是，这种差别引起了两种情形中阻力对雷诺数的不同依赖关系. 例如，如果我们研究任一物体在流体中的运动，在 $R=R_{临}$处，作用在物体上的阻力是连续的，而这时的定常流动却是绝对不稳定的. 在 $R=R_{临}$这一点上，对应于流动性质的改变，曲线$F=F(R)$上只能出现一个拐折. 然而对于管道中的流动而言，当 $R \geqslant R_{临}$时，本质上存在两种不同的阻力定律：一种是关于定常流动的，而另一种是关于湍流的. 不管 R 是什么值，只要它标志着从一种类型的流动过渡到另一种类型的流动，那么阻力在这个点上就是不连续的.

§ 30. 切向间断的不稳定性

设有两层不可压缩流体彼此作相对运动，即一层流体在另一层流体上“滑动”. 如果流体是理想的，则这种流动是绝对不稳定的；这两层流体的分界面必定是一个**切向间断面**，在切向间断面上，流体的切向速度是不连续的. 以后(§35)将会看到这种不稳定性会使流动具有什么样的实际性质；这里我们先来证明上述论断.

如果我们研究一小部分间断面以及它附近的流动，就可以把这小部分间断面看成是平面，并且把它两边的流体速度 $\boldsymbol{v}_1$ 和 $\boldsymbol{v}_2$ 当作恒量. 不失一般性，可以假定其中一个速度为零；关于这一

点，总是可以通过合适地选取坐标系来达到．设 $\boldsymbol{v}_2=0$，并且把 $\boldsymbol{v}_1$ 就记作 $\boldsymbol{v}$；我们以 $\boldsymbol{v}$ 的方向为 x 轴的方向，z 轴指向间断面的法向．

设间断面受到一微小的扰动，其中所有的量——间断面上点的坐标、流体的压力和速度——都是与 $e^{i(kx-\omega t)}$ 成正比的周期函数．我们来研究速度为 v 的这一侧的流体，将扰动所引起的速度的微小改变记作 $\boldsymbol{v}_1'$．根据方程组(26.1)(其中恒速度 $\boldsymbol{v}_0=\boldsymbol{v}$，以及 $\nu=0$)，便得到扰动速度 $\boldsymbol{v}'$ 应满足的下列方程组

$$\nabla\cdot\boldsymbol{v}'=0,$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{v}'}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}'=-\frac{\nabla p'}{\rho}.$$

因为 $\boldsymbol{v}$ 沿 x 轴，第二个方程可以改写为

$$\frac{\partial\boldsymbol{v}'}{\partial t}+v\frac{\partial\boldsymbol{v}'}{\partial x}=-\frac{\nabla p'}{\rho}. \tag{30.1}$$

如果对上式两边取散度，由于 $\nabla\cdot\boldsymbol{v}'=0$，所以左边为零，因此 p' 必须满足拉普拉斯方程：

$$\Delta p'=0. \tag{30.2}$$

设 $\zeta=\zeta(x,\ t)$ 是扰动所引起的间断面上点在 z 向的位移．导数 $\partial\zeta/\partial t$ 是给定 x 值处间断面坐标 ζ 的变化率．因为垂直于间断面的流体速度等于间断面本身的位移速率，作了必要的近似之后，得到

$$\partial\zeta/\partial t=v_z'-v\partial\zeta/\partial x \tag{30.3}$$

当然，这里必须取间断面上的 v_z' 的值．

现在来求 $p'=f(z)e^{i(kx-\omega t)}$ 形式的解．把它代入式(30.2)，得到 $f(z)$ 的方程为

$$d^2f/dz^2-k^2f=0,$$

因此 $f=$ 常数 $\times e^{\pm kz}$。假定所研究的这一侧(侧 1) 对应于 z 的正

值，于是我们必须取 $f=$ 常数 $\times e^{-kz}$. 所以

$$p'=\text{常数}\times e^{i(kx-\omega t)}e^{-kz}. \tag{30.4}$$

将这一表达式代入方程(30.1)的 z 分量方程，求得①

$$v'_z=kp'_1/i\rho_1(kv-\omega). \tag{30.5}$$

位移 ξ 的形式还可以求出，它正比于同一指数因子 $e^{i(kx-\omega t)}$，同时由式(30.3)得出

$$v'_z=i\xi(kv-\omega).$$

由此，式(30.5)变成

$$p'_1=-\xi\rho_1(kv-\omega)^2/k. \tag{30.6}$$

由类似的公式可以给出间断面上另一侧流体的压力 p'_2. 此时公式中有 $v=0$，且公式要改变符号(因为在这个区域中 $z<0$，因此所有的量必须与 e^{kz} 成正比，而不是与 e^{-kz} 成正比). 于是

$$p'_2=\xi\rho_2\omega^2/k. \tag{30.7}$$

为了包括分界面两边是两种不同的而且是不能混合的流体的情形，我们已在公式中写成不同的密度 ρ_1 和 ρ_2.

最后，根据间断面上压力 p_1 和 p_2 相等的条件，得到

$$\rho_1(kv-\omega)^2=-\rho_2\omega^2,$$

由此找到所期望的 ω 和 k 之间的关系式

$$\omega=kv\frac{\rho_1\pm i\sqrt{(\rho_1\rho_2)}}{\rho_1+\rho_2}. \tag{30.8}$$

我们看到 ω 是复数，并且总存在着有正虚部的 ω. 所以即使是无限小的扰动，切向间断面也是不稳定的. 在这种意义上，对于粘性很小，即 R 很大的流体，这个结论也是正确的. 在这种情形下，把“携带”型的不稳定性与真正的绝对不稳定性区分开来是没有意义的. 因为当 k 增加时，ω 虚部的增加是无限制的，所以在携

① 虽然 $kv=\omega$ 的情形在原则上是可能的，但是它在这里没有意义. 因为不稳定性只可能起因于复频率，而不是实频率.

带过程中，扰动的"增幅系数"要多大就有多大.

当我们考虑到有限的粘性时，切向间断面不再是突变的了；速度是经过一个有限厚度的层，从一个值变到另一个值. 这种流动的稳定性问题，在数学上完全类似于层流边界层中速度剖面具有拐点的流动稳定性问题(§41). 实验结果表明，不稳定性很快就出现了.

§ 31. 完全发展的湍流

在相当大的雷诺数时，湍流的特征为：在每一点上速度都随时间发生极不规则的变化. 这种流动称为**完全发展的湍流**. 此时速度在某个平均值附近不断地涨落. 同时必须指出，速度变化的幅度与速度本身的大小相比，一般说来并不很小. 在同一时刻，流场中各点的速度之间也存在类似的不规则的变化. 湍流中流体质点的轨迹极其复杂，由此导致流体广泛地混合.

上节已经指出，湍流有很多的自由度. 对应于这些自由度的初位相 β_j 的值，由流动的初始条件来确定. 但是有如此多的量需要确定，因此要列出这么多确切的初始条件是完全不现实的，甚至用这种方法来提出问题也是没有实际意义的.

和当前情况类似的，如果我们企图利用动力学方程组来研究组成宏观物体的所有分子的运动，也会遇到需要先列出全部初始条件，以确定所有分子的初位置和初速度，然后再积分运动方程组，这当然是没有实际意义的. 这种比拟还可以再扩充一步. 可以认为由各个分子组成的一个宏观物体具有极多的自由度，要对物体状态作精确的微观描述，一定要确定出组成物体的每一个粒子的坐标和速度. 这些量随时间变化的确切状况取决于它们初始时刻的值. 但是由于分子运动的极其复杂性和不规则性，我们可以假定，在充分长的时间间隔内，分子的速度和坐标取遍了所有可能

的数组，所以能排除掉以致消除掉初始条件的影响. 众所周知，这就使得对宏观物体进行统计研究成为可能.

湍流中有着类似的情形. 为了精确描述运动流体中速度分布随时间的变化，必须给出所有初位相 β_j 的值，然后可以知道每一时刻所有位相 $\phi_j=\omega_j t+\beta_j$ 的值. 我们已经知道，不管有什么样的初位相 β_j，只要经过足够长的时间间隔（比如一个准周期），流体所经历的状态总可以任意地接近任一给定状态，该状态由可以同时选取的一组位相值 ϕ_j 所确定①. 所以由此得出如下的结论：在湍流的研究中，经过充分长的时间间隔之后，实际的初始条件已没有任何影响了. 这表明湍流理论一定是统计的理论. 直到现在为止，完全定量的湍流理论还没有建立起来. 不过，已经知道了一些很重要的定性结果，这些将在下面几节中予以说明.

现在引入平均速度的概念. 平均速度是每个点的实际速度在长时间间隔内的平均值. 作了这种平均之后，速度的不规则变化抹平了，而且平均速度在流场中从一点到另一点的变化也平滑了. 以下我们用 $\boldsymbol{u}=\bar{\boldsymbol{v}}$ 来表示平均速度. 实际速度与平均速度之差 $\boldsymbol{v}'=\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}$ 则按湍流特有的方式不规则地变化，我们称它为速度的**涨落部分**.

现在来更详尽地研究叠加在平均流动上的这些不规则运动的性质. 这种运动又可以定性地当作是不同尺度**湍流涡**叠加的结果；所谓湍流涡的尺度，是指速度发生显著改变的距离的量级. 当雷诺数增加时，大的涡首先出现，涡越小出现得越晚. 对于非常大的雷诺数，从最大到最小的每一种尺度的涡都会出现. 最大的涡在任何湍流流动中都起着重要的作用，最大的涡具有整个流动区域线度的量级；在下文中，我们把任何给定湍流流动的这个尺度量

① 为了便于理解，翻译时加了括号中的文字. ——中译者注.

级记作 l. 这些大涡有最大的振幅. 它们的速度与平均速度在距离 l 上的改变同阶；我们用 Δu 来表示平均速度的这个改变的量级①. 相应于这些涡的频率具有 u/l 的量级，即平均速度 u(而不是它的改变量 Δu)与线度 l 之比. 这是因为，由频率确定的周期，正是在某个固定参考系中观测到流动图案重复出现的时间间隔. 但整个流动图案随流体一起相对于这种参考系运动，其速度为 u 的量级.

另一方面，小涡具有较高的频率，而且以更加小得多的振幅出现在湍流中. 它们可以看成是叠加在大的基本湍流涡上的精细结构. 总动能中只有很小一部分是属于小涡的.

根据上面给出的湍流流动图象，在任何一个给定的瞬时，我们可以得出一个关于涨落速度在空间中逐点变化特性的结论：在大距离(与 l 相当的距离)上，涨落速度的变化可由大涡速度的变化来给定，因此它与 Δu 同阶. 在小距离(与 l 相比)上，涨落速度的变化是由小涡速度的变化来决定，因此它很小(与 Δu 相比)②. 如果我们在任一给定点上观测速度随时间的变化，可以得到相同的图象. 在短时间间隔内(与 $T\sim l/u$ 相比)，速度没有显著的变化；在长时间间隔内，速度的变化达到 Δu 的量级.

长度 l 作为雷诺数 R 中的特征长度出现，而雷诺数决定着给定流动的性质. 除了这个雷诺数之外，我们还可以对各种尺度的湍流涡引进雷诺数的定性概念. 若 λ 是一个给定湍流涡的尺度量级，并且 v_λ 是其速度的量级，于是把 $R_\lambda\sim v_\lambda\lambda/\nu$ 定义为相应的雷

---

① 我们在这里所说的量级，不是指平均速度本身，而是指它的变化(在 l 量级距离上的变化)，因为正是这个改变量 Δu 表征了湍流流动的速度. 平均速度可以具有任何大小，它决定于所采用的参考系.

还可以指出，实验结果表明：最大涡的尺度实际上稍小于 l，并且它们的速度也稍小于 Δu.

② 但是在这些小距离上，它比平均速度的变化要大.

诺数. 因此湍流涡的尺度越小，这一雷诺数也越小.

对于大雷诺数的情形，大涡的雷诺数 R_λ 也是个大量. 但是大雷诺数相当于小粘性的情形. 因此可以断言，对于作为任何湍流基础的大涡，粘性是不重要的，可以当作是无粘性的，所以这些涡的运动服从欧拉方程. 特别是由此得出，在大涡中没有显著的能量耗散.

只有对于雷诺数与 1 相当的最小的涡，流体的粘性才是重要的. 我们用 λ_0 来表示这些涡的尺度，在下一节中将确定 λ_0 的大小. 虽然在讨论湍流流动的一般图象中，这些小涡是不重要的，但是，正是在这些小涡中产生了能量的耗散.

因此我们得到湍流能量耗散的下述概念. 能量由大涡传递给较小的涡，而在这个传递过程中，实际上并没有能量耗散. 我们可以说，存在着一个由大涡到小涡的连续能流，即从低频到高频的能流. 这个能流在最小的涡中被耗散掉，即由动能转换成热能①.

因为流体的粘性只对最小的涡而言才是重要的，所以可以断言，与尺度 $\lambda \gg \lambda_0$ 的涡有关的物理量都和 ν 无关(更确切地说，如果 ν 改变而其它的运动条件不变的话，这些物理量是不会改变的). 这个情况减少了用来确定湍流性质的物理量的数目，因此用适当的物理量的量纲作相似性分析，在湍流研究中就显得非常重要了.

现在用相似性分析来确定湍流流动中能量耗散的量级. 设 ϵ 是单位质量流体在单位时间内的平均能量耗散②. 我们已经知道，这种能量来自大涡，并由大涡逐渐地传递给较小的涡，直到在尺度 $\sim\lambda_0$ 的涡中耗散掉为止. 因此，虽然耗散最终是由粘性引起的，但是 ϵ 的量级只能由描述大涡特征的那些量来确定. 那些量是指

① 为了维持稳恒状态，当然需要有外部的能源，它能够不断地给大涡提供能量.

② 在本章中，ϵ 表示平均能量耗散而不是流体的内能.

流体的密度ρ、线度l和速度Δu. 根据这三个量，我们只能作出一个具有ϵ量纲(即尔格/克·秒=厘米^2/秒^3)的量. 于是得出

$$\epsilon \sim (\Delta u)^3/l, \tag{31.1}$$

由它来确定湍流中能量耗散的量级.

在某些方面,湍流运动的流体可以定性地描述成具有“湍流粘性系数”$\nu_{湍}$的流体，$\nu_{湍}$不同于真正的运动粘性系数ν. 因为$\nu_{湍}$表征湍流的性质,它的量级必须由ρ，Δu和l来确定. 由这些量只能构成一个量$l\Delta u$,它具有运动粘性系数的量纲,所以

$$\nu_{湍} \sim l\Delta u. \tag{31.2}$$

因此湍流粘性系数与原有的粘性系数之比为

$$\nu_{湍}/\nu \sim R,$$

即湍流粘性系数随雷诺数的增加而增加①.

根据粘性系数的通常定义,能量耗散ϵ用$\nu_{湍}$表示成

$$\epsilon \sim \nu_{湍}(\Delta u/l)^2. \tag{31.3}$$

虽然ν是用真实速度的空间导数来确定能量耗散,但是$\nu_{湍}$却是用平均速度的梯度($\sim\Delta u/l$)来确定能量耗散.

我们也可以用相似性分析来确湍流区域中压力变化Δp的量级. 由ρ, l和Δu能够构成压力量纲的量只有$\rho(\Delta u)^2$. 因此必须有

$$\Delta p \sim \rho(\Delta u)^2. \tag{31.4}$$

§ 32. 局部湍流

现在来研究涡尺度为λ的湍流的性质，这里的λ远小于基本

---

① 但是在实际上还应包含一个数值相当大的系数. 因为上面已经指出，l和Δu与湍流的实际尺度和速度可以有很大的差别. 比值$\nu_{湍}/\nu$可以更准确地写成

$$\nu_{湍}/\nu \sim R/R_{临},$$

这个公式考虑到这样的事实，当$\nu_{湍}$和ν在实际上是同一量级时，并不是$R\sim1$的情形,而是$R\sim R_{临}$的情形.

涡的尺度 l. 我们称这些性质为湍流的**局部性质**. 我们将研究远离所有固壁的流体(更确切地说,就是流体离开固壁的距离远大于 λ).

很自然地可以假设这种远离固壁的小尺度湍流是**各向同性的**. 这就是说在线度远小于 l 的区域上,湍流的性质与方向无关,特别是它们与平均速度的方向无关. 必须着重指出, 在这里和在本节的所有地方,当我们谈到流体小区域中湍流的性质时,总是指该区域中各流体质点的相对运动, 而不是指由更大的涡引起的整个区域的绝对运动.

我们发现,可以直接从相似性分析中得到,有关湍流局部性质的若干非常重要的结论. 这些结果是由柯尔莫戈罗夫 (A.H.Колмогоров)和奥布霍夫(A.M.Обухов)在1941年得到的. 为了求得这些结果,我们首先要搞清楚下面的情况,即在一个远小于 l 但远大于距离 λ_0 (λ_0 是流体粘性开始起重要作用区域的线度) 的区域内, 湍流的运动性质是由哪些参数决定的. 下面要讨论的正是这种中间距离的情况. 上述问题中的这些参数是流体的密度 ρ 和另一个表征任何湍流特征的量, 即单位质量流体在单位时间内耗散的能量 ϵ. 我们已经知道, ϵ 是不断地从大的涡传递给较小的涡的"能量通量". 因此, 虽然能量耗散最终是由流体的粘性所引起的,并且发生在最小的涡中, 但是量 ϵ 却由较大涡的性质所决定. 很自然地可以假定, (对于给定的 ρ 和 ϵ) 湍流的局部性质不依赖于整个流动的线度 l 和速度 Δu. 流体的运动粘性系数 ν 也不可能出现在目前要研究的任何一个量中 (要记住, 我们涉及的距离 $\lambda \gg \lambda_0$).

现在来确定 λ 量级距离内湍流速度改变量 v_λ 的量级. 它必须只由 ρ, ϵ 来确定, 当然还有距离 λ 本身. 从这三个量出发, 我们只能组成一个具有速度量纲的量, 即$(\epsilon\lambda)^{1/3}$. 于是可以断言,关

系式

$$v_\lambda \sim (\epsilon\lambda)^{1/3} \tag{32.1}$$

必须成立．因此我们得到一个非常重要的结论：小距离上速度的变化与该距离的立方根成正比（**柯尔莫戈罗夫和奥布霍夫定律**）．量 v_λ 也可以当作具有 λ 量级尺度的湍流涡的速度①．

现在用稍微不同的方式来提出问题，即要确定在时间间隔 τ 上给定点处速度改变量 v_τ 的量级，其中 τ 远小于表征整个流动的时间 $T\sim l/u$．为此我们指出，由于存在纯粹的平均流动，经过时间间隔 τ，流体的任何给定部分都移过了一个 τu 量级的距离，这里 u 是平均速度．因此，τ 时间内在给定点处的这部分流体离开其初始时刻的位置已有一段距离 τu．直接用 τu 代替式(32.1)中的 λ，于是可以得到所求的 v_τ，

$$v_\tau \sim (\epsilon\tau u)^{1/3}. \tag{32.2}$$

因此经过时间间隔 τ 的速度变化与这一时间间隔的立方根成正比．

必须将量 v_τ 与 v'_τ 区别开来，v'_τ 是流体的一部分在到处移动中的速度变化．这一变化显然只能依赖于确定湍流局部性质的 ρ 和 ϵ，当然也依赖于 τ 本身．作出 ρ，ϵ 和 τ 的唯一具有速度量纲的组合后，得

---

① 小距离内速度的变化 v_λ 基本上就是速度涨落部分的变化；小距离内平均速度的变化远小于这些距离内涨落速度的变化．

如果用尺度为 λ 的涡的特征量来表示恒常(能量耗散)ϵ，则可以通过另一条途径来得到关系式(32.1)．因为 ϵ 必须正比于速度 v_λ 梯度的平方并且正比于相应的湍流粘性系数

$$\nu_{湍,\lambda} \sim v_\lambda \lambda$$

(参阅式(31.2)，式(31.3))，所以

$$\epsilon \sim \nu_{湍,\lambda}(v_\lambda/\lambda)^2 \sim v_\lambda^3/\lambda,$$

由此得到式(32.1)．

$$v_\tau' \sim (\epsilon\tau)^{1/2}. \tag{32.3}$$

与给定点上的速度变化不同，它与 τ 的平方根成正比，而不是与 τ 的立方根成正比．容易看出，对于 τ 远小于 T 的情形，v_τ' 总是小于 v_τ 的①．

利用关于 ϵ 的表达式(31.1)，可以将式(32.1)改写成

$$v_\lambda \sim \Delta u(\lambda/l)^{1/3}. \tag{32.4}$$

类似地可以将 v_τ 写成

$$v_\tau \sim \Delta u(\tau/T)^{1/3}, \tag{32.5}$$

其中 $T \sim l/u$．

现在来解决在什么样的距离上流体的粘性开始变得重要了．这些距离 λ_0 也可确定出湍流中最小涡的尺度量级(与湍流的"外尺度"l 对比，λ_0 称为湍流的"内尺度")．为了确定 λ_0，我们定义雷诺数

$$R_\lambda \sim v_\lambda \lambda/\nu;$$

利用式(32.4)，得

$$R_\lambda \sim \Delta u \cdot \lambda^{4/3}/\nu l^{1/3}.$$

引入整个流动的雷诺数 $R \sim l\Delta u/\nu$ 以后，可以将 R_λ 改写成

$$R_\lambda \sim R(\lambda/l)^{4/3}.$$

λ_0 的量级应使 $R_{\lambda_0} \sim 1$，因此得出

$$\lambda_0 \sim l/R^{3/4}. \tag{32.6}$$

从 ρ，ϵ 和 ν 作出唯一具有长度量纲的组合后，得

$$\lambda_0 \sim (\nu^3/\epsilon)^{1/4},$$

再借助于式 (31.1) 用 Δu 和 l 来表示 ϵ，就可以得到同样的表达式．

因此湍流的内尺度与 $R^{3/4}$ 成反比．与它相应的速度为

$$v_{\lambda_0} \sim \Delta u/R^{1/4}; \tag{32.7}$$

---

① 实际上，在得出式(32.2)的过程中，已经假定了不等式

$$v_\tau' \ll v_\tau.$$

当 R 增加时，v_{λ_0} 也是减小的．最后，对应于这种尺度的涡的频率的量级为 $\omega_0 \sim u/\lambda_0$，或

$$\omega_0 \sim uR^{3/4}/l. \tag{32.8}$$

由此给出了湍流频谱上界的量级，其下界则为 u/l 量级的频率．所以频率范围随雷诺数的四分之三次方而增加，即正比于 $R^{3/4}$．

类似的讨论能够使我们去确定湍流自由度数目的量级．以 n 表示单位体积流体的自由度数；n 的量纲为 1/厘米^3．这个自由度数只能决定于 ρ，ϵ 以及运动粘性系数 ν，因为后者确定湍流涡尺度的下限．由这三个量只能构成一个具有量纲为 1/厘米^3 的组合，即$(\epsilon/\nu^3)^{3/4}$；这正好是 $1/\lambda_0^3$，也是预料中的结果．于是得

$$n \sim 1/\lambda_0^3 \sim R^{9/4}/l^3. \tag{32.9}$$

总的自由度数 N 可由 n 乘以湍流区域的体积（数量级为 l^3）得到①：

$$N \sim R^{9/4}. \tag{32.10}$$

最后，让我们来研究线度 λ 远小于 λ_0 的区域中流动的性质．在这样的区域中，流动是规则的，并且流动的速度光滑地变化．因此可以将 v_λ 展成 λ 的幂级数，如果只保留到一阶项，则得 $v_\lambda=$ 常数 $\times\lambda$．因为当 $\lambda\sim\lambda_0$ 时，必须有 $v_\lambda \sim v_{\lambda_0}$，所以上述常数的量级为 v_{λ_0}/λ_0．将式(32.6)和(32.7)代入，则得

$$v_\lambda \sim \Delta u \cdot R^{1/2}\lambda/l. \tag{32.11}$$

这个公式也可以直接让能量耗散 ϵ 的两个表达式相等来得到，这两个 ϵ 的表达式是：用表征大涡的量来确定 ϵ 的表达式 $\epsilon \sim (\Delta u)^3/l$；

---

① 公式(32.6)—(32.10)确定了相应的量是如何随雷诺数变化的．但是必须记住，所有公式在定量方面实际上都可以有一个相当大的数值因子．例如，自由度数在 $R \sim R_{临}$ 而不是在 $R\sim 1$ 时，其量级才是 1．因此必须用比值 $R/R_{临}$ 来代替式（32.10）中的 R，即

$$N \sim (R/R_{临})^{9/4}.$$

式(31.1);用实际发生能量耗散的涡的速度梯度($\sim v_\lambda/\lambda$)来确定 ϵ 的表达式 $\epsilon\sim\nu(v_\lambda/\lambda)^2$.

问　　题

设两个流体质点相隔一个很小的距离 $\lambda_1(\gg\lambda_0)$. 试求这两个流体质点变成相距 $\lambda_2(\lambda_1\ll\lambda_2\ll l)$ 时所需时间 τ 的量级.

解: 如果 $\lambda\gg\lambda_0$, 根据量纲分析, 我们有 $d\lambda/dt\sim(\epsilon\lambda)^{1/3}$. 积分之, 并利用 $\lambda_2\gg\lambda_1$ 的条件, 求得

$$\tau\sim(\lambda_2^2/\epsilon)^{1/3}.$$

§33. 速度关联

公式(32.1)定性地确定了局部湍流的**速度关联**, 即两个相邻点上速度之间的关系. 现在引入一些用以定量表征这种关联的量①. 例如, 这些量可以是张量

$$B_{ik}=\overline{(v_{2i}-v_{1i})(v_{2k}-v_{1k})}, \qquad (33.1)$$

的分量, 其中 $\boldsymbol{v}_2$ 和 $\boldsymbol{v}_1$ 是两个相邻点上的流体速度, 而一横表示对时间的平均②. 从点 1 到点 2 的矢径记作 $\boldsymbol{r}$; 假定 $\boldsymbol{r}$ 的大小 r 远小于 l(但是并不需要远大于湍流的内尺度 λ_0).

由于局部湍流是各向同性的, 因此张量 B_{ik} 不可能依赖于空间的任何方向. 所以能够出现在 B_{ik} 表达式中的唯一矢量是矢径 $\boldsymbol{r}$. 换句话说, 除了 $\boldsymbol{r}$ 的大小 r 之外, B_{ik} 中只能包含有单位张量 δ_{ik} 和沿 $\boldsymbol{r}$ 方向的单位矢量 $\boldsymbol{n}$. 这个二阶张量的最一般形式为

$$B_{ik}=A(r)\delta_{ik}+B(r)n_in_k. \qquad (33.2)$$

---

① 本节给出的结果, 是由卡门(T. von Kármán)和霍华斯(L. Howarth(1938))以及柯尔莫戈罗夫(A. H. Колмогоров, 1941)得出的. 在非均匀加热的湍流流动中, 温度脉动的类似关系将在以后给出(见 §54 的问题 3 和问题 4).

② 如果点 1 和点 2 上的速度之间并不关联, 则式(33.1)中乘积的平均值还原为每个因子平均值的乘积, 于是它必然为零.

我们这样来选取坐标轴，让其中的一个轴沿着 $\boldsymbol{n}$ 的方向，沿这条轴的速度分量记作 v_r，而垂直于 $\boldsymbol{n}$ 的速度分量记作 v_t。于是分量 B_{rr} 是两相邻流体质点沿其连线方向相对速度均方值。类似地，B_{tt} 是一流体质点相对于另一质点的横向速度均方值。因为 $n_r=1$，$n_t=0$，则由式(33.2)得

$$B_{rr}=A+B,\quad B_{tt}=A,\quad B_{rt}=0. \tag{33.3}$$

现在来导出 B_{rr} 和 B_{tt} 之间的关系。为此，我们首先要注意，在小距离上速度变化主要是由小尺度的涡引起的。局部湍流的性质不依赖于叠加在它上面的大尺度涡。因此为了计算张量 B_{ik}，只要讨论完全各向同性和均匀湍流的特殊情形就够了，这时流体的平均速度为零①。将式(33.1)中的括号展开，得

$$B_{ik}=\overline{v_{1i}v_{1k}}+\overline{v_{2i}v_{2k}}-\overline{v_{1i}v_{2k}}-\overline{v_{1k}v_{2i}}.$$

因为流动是完全均匀和各向同性的，我们有 $\overline{v_{1i}v_{1k}}=\overline{v_{2i}v_{2k}}$ 和 $\overline{v_{1i}v_{2k}}=\overline{v_{1k}v_{2i}}$。因此

$$B_{ik}=2\overline{v_{1i}v_{1k}}-2\overline{v_{1i}v_{2k}}. \tag{33.4}$$

将这个表达式对点 2 的坐标求导：

$$\partial B_{ik}/\partial x_{2k}=-2\overline{v_{1i}\partial v_{2k}/\partial x_{2k}}.$$

但是根据连续方程，有 $\partial v_{2k}/\partial x_{2k}=0$，所以 $\partial B_{ik}/\partial x_{2k}=0$。因为 B_{ik} 只是矢径 $\boldsymbol{r}$ 的分量 $x_i=x_{2i}-x_{1i}$ 的函数，于是对 x_{2k} 的导数等同于对 x_k 的导数。将式(33.2)代入，经过简单的计算之后，得

$$A'+B'+2B/r=0,$$

其中“′”表示对 r 的导数。再以式(33.3)代入，可将上式写成

$$B'_{rr}+2(B_{rr}-B_{tt})/r=0,$$

由此，最后得到 B_{rr} 和 B_{tt} 之间的一般关系为：

---

① 这样的流动可以想象成流体受到强烈的扰动，然后任其自由运动。当然，流动一定随着时间而衰减。因此严格地说，公式(33.1)中的平均并不是对时间的平均，而是在给定时刻对点 1 和点 2（它们之间的距离给定为 r）的所有可能位置的平均。

$$2rB_{tt}=d(r^2B_{rr})/dr. \tag{33.5}$$

在远大于 λ_0 的距离 r 上，根据式(32.1)，速度差与 $r^{1/3}$ 成正比．所以对于这样的 r，张量 B_{ik} 的分量与$r^{2/3}$ 成正比．将 $B_{rr}=$常数$\times r^{2/3}$ 和 $B_{tt}=$常数$\times r^{2/3}$ 代入式(33.5)，就得到简单的关系

$$B_{tt}=\frac{4}{3}B_{rr}. \tag{33.6}$$

当距离 r 远小于 λ_0 时，速度差与 r 成正比，因此 B_{rr} 和 B_{tt} 与 r^2 成正比．所以公式(33.5)给出关系

$$B_{tt}=2B_{rr}. \tag{33.7}$$

在这些距离($r\ll\lambda_0$)上，B_{tt} 和 B_{rr} 也可以分别用平均能量耗散 ϵ 来表示．写出 $B_{rr}=ar^2$，其中 a 是常数，再合并式(33.2)，(33.3)和(33.4)，得

$$\overline{v_{1i}v_{2k}}=\overline{v_{1i}v_{1k}}-ar^2\delta_{ik}+\frac{1}{2}ar^2n_in_k.$$

对这个关系式求导，得到

$$\overline{\frac{\partial v_{1i}}{\partial x_{1l}}\frac{\partial v_{2i}}{\partial x_{2l}}}=15a,\quad \overline{\frac{\partial v_{1i}}{\partial x_{1l}}\frac{\partial v_{2l}}{\partial x_{2i}}}=0.$$

由于这种关系式对任意小的 r 均成立，所以可以令 $x_{1i}=x_{2i}$，因此

$$\overline{\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_l}\right)^2}=15a,\quad \overline{\frac{\partial v_i}{\partial x_l}\frac{\partial v_l}{\partial x_i}}=0.$$

但是根据普遍公式(16.3)，对于平均能量耗散有

$$\epsilon=\frac{1}{2}\nu\overline{\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_l}+\frac{\partial v_l}{\partial x_i}\right)^2}=\nu\left[\overline{\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_l}\right)^2}+\overline{\frac{\partial v_i}{\partial x_l}\frac{\partial v_l}{\partial x_i}}\right]=15a\nu,$$

因此 $a=\epsilon/15\nu$．所以我们得到用平均能量耗散 ϵ 给出 B_{rr} 和 B_{tt} 的下列关系式①：

---

① 似乎可以设想，在原则上有可能得到一个适用于任何湍流的普遍公式，在所有远小于 l 的距离 r 上将给出 B_{rr} 和 B_{tt}．但是在事实上，根据下面的讨论就会知道，不存在这样的公式．$(v_{2i}-v_{1i})\cdot(v_{2k}-v_{1k})$ 的瞬时值在原则上可以表成同一时刻能量耗散 ε 的一个普遍公式．不过当我们对这些表达式取平均值时，因为在大尺度(尺度 $\sim l$)涡的周期量级的时间内，ε 的变化规律将起主要的作用，而对于不同的流动，这个规律是不同的．因此平均的结果是不能普遍适用的．

$$B_{tt}=\frac{2}{15}\epsilon r^2/\nu, \qquad B_{rr}=\frac{1}{15}\epsilon r^2/\nu. \tag{33.8}$$

我们还可以讨论三重关联

$$B_{ikl}=\overline{(v_{2i}-v_{1i})(v_{2k}-v_{1k})(v_{2l}-v_{1l})}. \tag{33.9}$$

仍旧假定流动是完全均匀和各向同性的. 让我们首先来研究辅助张量$\overline{v_{1i}v_{1k}v_{2l}}$. 这张量对下标 i 和 k 是对称的, 同时由于各向同性, 它和 B_{ik} 一样, 也一定可以用 n_i 和 δ_{ik} 来表示. 这种张量的最普遍形式为

$$\overline{v_{1i}v_{1k}v_{2l}}=C(r)\delta_{ik}n_l+D(r)(\delta_{il}n_k+\delta_{kl}n_i)+F(r)n_in_kn_l. \tag{33.10}$$

将上式对 x_{2l} 求导, 利用连续方程, 则得

$$\frac{\partial}{\partial x_{2l}}(\overline{v_{1i}v_{1k}v_{2l}})=\overline{v_{1i}v_{1k}\frac{\partial v_{2l}}{\partial x_{2l}}}=0.$$

将$\overline{v_{1i}v_{1k}v_{2l}}$的表达式代入, 经过简单的计算(从略)之后, 得到两个方程:

$$d[r^2(3C+2D+F)]/dr=0,$$
$$C'+2(C+D)/r=0.$$

前者的积分给出

$$3C+2D+F=\text{常数}/r^2.$$

当 $r=0$ 时, 函数 C, D 和 F 必须保持有限值, 于是必须令常数为零. 所以

$$3C+2D+F=0.$$

根据上面得到的两个方程, 求得

$$D=-\left(C+\frac{1}{2}rC'\right), \quad F=rC'-C. \tag{33.11}$$

现在将式(33.9)中的括号展开. 容易看出, 由于流动的各向同性, 平均值$\overline{v_{1i}v_{1k}v_{1l}}$和$\overline{v_{2i}v_{2k}v_{2l}}$ 均为零. 因为这些乘积中的三个速度均取自同一点, 所以可表示张量$\overline{v_iv_kv_l}$的唯一张量为 δ_{ik}. 但是由

单位张量来构造一个三阶对称张量是不可能的. 另一方面，当点1和点 2 互换时，因为式(33.10)中的矢量n_i要变号，所以像$\overline{v_{1i}v_{1k}v_{2l}}$和$\overline{v_{2i}v_{2k}v_{1l}}$这样的平均值都是大小相等、符号相反的. 结果是

$$B_{ikl}=2(\overline{v_{1i}v_{1k}v_{2l}}+\overline{v_{1i}v_{2k}v_{1l}}+\overline{v_{2i}v_{1k}v_{1l}}).$$

将式(33.10)和(33.11)代入，我们有表达式

$$B_{ikl}=2(rC'+C)(\delta_{ik}n_l+\delta_{il}n_k+\delta_{kl}n_i)+6(rC'-C)n_in_kn_l. \tag{33.12}$$

仍然取一个坐标轴平行于 n，我们得出张量 B_{ikl} 的分量为：

$$B_{rrr}=-12C,\quad B_{rtt}=-2(C+rC'),\quad B_{rrt}=B_{ttt}=0.$$

因此我们看到，在非零分量 B_{rtt} 和 B_{rrr} 之间存在着关系式

$$6B_{rtt}=d(rB_{rrr})/dr. \tag{33.13}$$

最后，我们还可以找出张量 B_{ik} 和 B_{ikl} 的分量之间的一个关系. 为此计算导数$\partial(\overline{v_{1i}v_{2k}})/\partial t$，要记住，完全均匀和各向同性的流动必需随着时间而衰减. 借助于纳维-斯托克斯方程来表示导数 $\partial v_{1i}/\partial t$ 和 $\partial v_{2k}/\partial t$，得出

$$\frac{\partial}{\partial t}(\overline{v_{1i}v_{2k}})=-\frac{\partial}{\partial x_{1l}}(\overline{v_{1i}v_{1l}v_{2k}})-\frac{\partial}{\partial x_{2l}}(\overline{v_{1i}v_{2k}v_{2l}})-$$

$$-\frac{\partial}{\partial x_{1i}}\left(\frac{\overline{p_1v_{2k}}}{\rho}\right)-\frac{\partial}{\partial x_{2k}}\left(\frac{\overline{p_2v_{1i}}}{\rho}\right)+\nu\Delta_1(\overline{v_{1i}v_{2k}})+\nu\Delta_2(\overline{v_{1i}v_{2k}}).$$

在利用均匀各向同性的性质时，必须记住，当点 1 和点 2 互换时，r 的符号也改变，于是(一阶)空间导数一定变号. 因而前两项相等，最后两项也相等，中间的第三项和第四项为零. 根据各向同性，则平均值$\overline{p_1v_{2k}}$ 必须是 $f(r)n_k$ 的形式. 所以散度 $\partial(\overline{p_1v_{2k}})/\partial x_{2k}=\overline{p_1\partial v_{2k}/\partial x_{2k}}$为零. 但是散度处处为零的中心对称矢量，只有常数乘$(1/r^2)n_k$这么一个. 这样的矢量在 $r=0$ 时将趋向无限，因此是不可能的. 于是常数必须为零.

这样得

$$\frac{\partial}{\partial t}(\overline{v_{1i}v_{2k}})=-2\frac{\partial}{\partial x_{1l}}(\overline{v_{1i}v_{1l}v_{2k}})+2\nu\Delta_1\overline{v_{1i}v_{2k}}. \qquad (33.14)$$

依照上面导出的公式，这里必须将

$$\overline{v_{1i}v_{2k}}=\overline{v_{2i}v_{2k}}-\frac{1}{2}B_{ik},$$

$$\overline{v_{1i}v_{1l}v_{2k}}=-\frac{1}{12}B_{rrr}\delta_{il}n_k+\frac{1}{12}\left(\frac{1}{2}rB'_{rrr}+B_{rrr}\right)(\delta_{ik}n_l+\delta_{kl}n_i)$$

$$-\frac{1}{12}(rB'_{rrr}-B_{rrr})n_in_kn_l. \qquad (33.15)$$

代入式(33.14)．利用流动的完全均匀性和各向同性，在式(33.15)的第一个表达式中可用$\frac{1}{3}\overline{v^2}\delta_{ik}$来代替$\overline{v_{2i}v_{2k}}$，

$$\overline{v_{1i}v_{2k}}=\frac{1}{3}\overline{v^2}\delta_{ik}-\frac{1}{2}B_{ik}. \qquad (33.16)$$

单位质量动能$\frac{1}{2}\overline{v^2}$的时间导数正好与能量耗散$\epsilon$只差一个负号，所以$\partial\left(\frac{1}{3}\overline{v^2}\right)/\partial t=-\frac{2}{3}\epsilon$．经过简单的(然而是冗长的)计算之后给出方程

$$-\frac{2}{3}\epsilon-\frac{1}{2}\frac{\partial B_{rr}}{\partial t}=\frac{1}{6r^4}\frac{\partial(r^4B_{rrr})}{\partial r}-\frac{\nu}{r^4}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^4\frac{\partial B_{rr}}{\partial r}\right). \qquad (33.17)$$

因为假定r很小，因此在上式左边令$r=0$可以有足够的精度，即与ϵ相比可略去$\partial B_{rr}/\partial t$．最后的方程乘上$r^4$，再对$r$积分，并利用$r=0$时关联函数为零的条件，我们得到下列$B_{rr}$和$B_{rrr}$之间的关系：

$$B_{rrr}=-\frac{4}{5}\epsilon r+6\nu dB_{rr}/dr. \qquad (33.18)$$

和式(33.13)一样，无论r是远大于或远小于λ_0，关系式(33.18)均成立．当$r\gg\lambda_0$时，粘性项很小，就有

$$B_{rrr}=-\frac{4}{5}\epsilon r. \tag{33.19}$$

如果 $r\ll\lambda_0$，我们可以将 B_{rr} 的表达式(33.8)代入式(33.18)，则得 $B_{rrr}=0$. 因为在这种情形下，B_{rrr} 必须是 r 的三级量，所以一次项必然为零①.

§ 34. 湍流区域和分离现象

湍流流动一般说来是有旋的. 但是流体中涡量 $\boldsymbol{\omega}(\equiv\nabla\times\boldsymbol{v})$ 的分布在湍流流动(当 R 很大时)中有某些特性：在绕物体的"定常"湍流流动中，整个流体的范围通常可以分成两个独立的区域. 其中一个区域中的流动是有旋的，而另一个区域中的涡量为零，所以是势流. 因此涡量只在一部分流体中不为零(不过，一般说来这个区域是无限的.)

这样一个被限定的有旋流动区域之所以能够存在是基于下列事实，即湍流流动可以当作满足欧拉方程的理想流体运动来处理②. 我们已经知道(§ 8)，对于理想流体的运动，环量守恒定律成立. 特别是，如果在流线上的任何一点有 $\boldsymbol{\omega}=0$，则在这条流线上每一个点都有 $\boldsymbol{\omega}=0$. 反之，如果在流线上的任何一点有 $\boldsymbol{\omega}\neq 0$，则在这条流线的所有点上 $\boldsymbol{\omega}$ 都不为零. 因此很清楚，如果有旋流动区域具有这样的性质：其中的流线不能进入它以外的区域，则存在被限定的有旋和无旋流动的区域是与运动方程相容的. 这样的 $\boldsymbol{\omega}$ 分布总是稳定的，因此在分离面以外，涡量仍然为零.

有旋的湍流区域的一个性质是：这个区域与周围空间的流体

---

① 比值 $|B_{rrr}/B_{rr}|$ 在 $l\gg r\gg\lambda_0$ 和 $r\ll\lambda_0$ 的区域中一定是恒量. 实验结果表明：实际上这个量对所有的 r 都近似为恒量，数值约为 0.4.

② 这些方程对湍流的适用范围到 λ_0 量级的距离为止. 因此有旋流动和无旋流动的明确界线，也只能确定到这个距离的量级为止.

的交换只能单向进行，即流体能够由势流区域进入有旋区域，但是永远不能离开有旋区域.

应当强调，这里给出的推断当然不能认为是上述问题的严格证明. 但是，有限的有旋湍流区的存在似乎已为实验所证实.

在有旋和无旋区域中，两者的流动都是湍流的. 但是在这两个区域中，湍流的性质是完全不同的. 为了说明这种差别的原因，我们可以指出满足拉普拉斯方程 $\Delta\phi=0$ 的势流有下述普遍性质. 假定流动在 xy 平面上是周期性的，则 ϕ 通过 $e^{ik_1x+ik_2y}$ 形式的因子而包含 x 和 y. 于是

$$\partial^2\phi/\partial x^2+\partial^2\phi/\partial y^2=-(k_1^2+k_2^2)\phi=-k^2\phi,$$

同时，由于二阶导数之和必须为零，所以 ϕ 对 z 的二阶导数一定等于 ϕ 乘上一个正系数：$\partial^2\phi/\partial z^2=k^2\phi$. 于是当 $z>0$ 时，由 e^{-kz} 形式的阻尼因子给出 ϕ 对 z 的依赖关系（e^{kz} 将引起 ϕ 无限制地增加，这显然是不能取的）. 因此，如果势流在某个平面上是周期性的，则它一定沿该平面的垂直方向而衰减. 而且 k_1 和 k_2 越大（即在 xy 平面上流动的周期越小），则流动沿 z 轴的衰减就越快. 所有这些论断，对于不是严格的周期运动而只有某种周期性性质的情形仍然在定性上适用.

由此立即得到下述结论. 在有旋流动区域以外，湍流涡一定被衰减掉，而且一定是湍流涡的尺度越小，衰减就越快. 换句话说，小尺度的涡不能穿入势流的区域很远. 所以只有最大尺度的涡在这种区域中才是重要的；它们在相当于有旋区域（横向）线度量级的距离上被衰减掉，有旋区的线度正好是这种情形中的湍流的外尺度. 在远大于这个线度的距离上，实际上并没有湍动，因此流动可以看作是层流的.

我们已经知道，湍流中的能量耗散发生在最小尺度的涡中；大尺度的涡中没有显著的能量耗散，这就是为什么对湍流可以应用

欧拉方程的原因．根据上面所说的道理，我们得到一个重要的结论：能量耗散主要发生在有旋的湍流区,而在该区域以外,几乎没有能量耗散．

只要记住有旋的湍流流动和无旋的湍流流动的所有这些性质，今后为了简短起见，就可将有旋湍流区域简称为**湍流区**或**湍动区**．在以后的几节中,我们将讨论各种情况下湍流区的形状．

湍流区一定在某个方向上以被绕流物体的部分表面为界，这部分表面的界线称为**分离线**．湍流流体与其余流体的分界面由这条分离线开始．物体绕流中湍流区的形成称为**分离现象**．

湍流区的形状是由流体中的主流（而不是紧靠物体表面的邻近区域）的性质决定的．一个完全的湍流理论（至今还未建立起来),在物体表面上分离线的位置给定以后，原则上应能根据理想流体的运动方程组确定出湍流区的形状.但是,分离线的实际位置要由紧靠物面的邻域中的流动性质(称为**边界层**)来确定．在这个紧靠物面的邻域中,粘性将起重要的作用(见§40)．

§35. 湍流射流

在某些情形下，尤其是射入充满流体的整个空间中的各种类型自由湍流射流的情形(普朗特, L. Prandtl, 1925)，只要通过简单的相似性分析就能确定出湍流区的形状及其他一些基本性质．

作为第一个例子，现在来研究在两个无限平板相交的拐角上当流动“分离”时所形成的湍流区(图16中画出了它的横截面).对于层流的情形(§10,图3),流动沿着拐角的一边(即AO)平滑地转向,然后沿着另一边(即OB)离去．在湍流的情形下，其流动图象是完全不同的．

现在流动沿拐角的一边到达顶点时并不改变流向，而是继续沿原方向前进．此时沿另一边的BO方向上出现了另一个流动，

这两个流动“混合”形成湍流区①；在图 16 的横截面中，用虚线画出了这个区域的边界. 这个区域的起因可以说明如下. 设想这样一个流动，其中沿 AO 的均匀来流以不变的方向继续向前运动，以致充满平面 AO 及其向右延伸平面以上的整个上半空间，而在延伸平面下面的流体是静止的. 换句话说，我们在恒速度运动的流体和静止的流体之间有一个分界面(平面 AO 的延伸平面). 但是这样的间断面是不稳定的，所以在实际上不可能存在(见 § 30). 这种不稳定性导致上下两部分流体的混合和湍流区的形成. 由于流体必须从下面进入湍流区，所以沿 BO 方向的流动出现了.

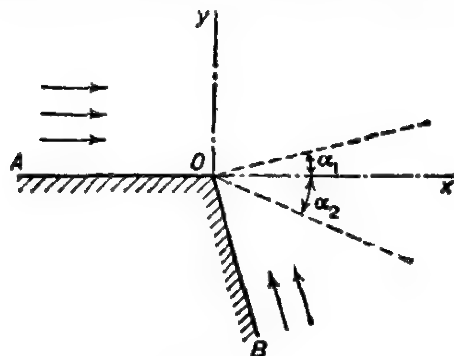


图 16

让我们来确定湍流区的形状. 取 x 轴沿着图 16 所示的方向，原点取在 O 点. 我们用 Y_1 和 Y_2 表示从 xz 平面到湍流区上、下边界的距离，所以要求确定出作为 x 函数的 Y_1 和 Y_2. 从相似性讨论出发，很容易做到这一点. 因为平面在所有方向上都是无限的，所以在我们的讨论中并不存在具有长度量纲的恒定参数. 由此可见 Y_1, Y_2 只能直接正比于 x：

$$Y_1 = x\,\mathrm{tg}\,\alpha_1, \quad Y_2 = x\,\mathrm{tg}\,\alpha_2. \tag{35.1}$$

比例常数只是数值常数，我们把它们写成 $\mathrm{tg}\,\alpha_1$, $\mathrm{tg}\,\alpha_2$，所以 α_1 和 α_2 是湍流区两个边界和 x 轴之间的夹角. 因此湍流区界于两个相交于拐角顶边的平面之间.

①请记住，在湍流区以外是，随着离开湍流区边界的距离的增大而逐渐地变成层流的无旋流动.

α_1和α_2的值只取决于拐角的大小，而并不依赖于(例如)主流的速度．它们不能从理论上计算得到；对于绕直角的流动，其实验结果为$\alpha_1=5^\circ$，$\alpha_2=10^\circ$①．

沿拐角两边流动的速度是不同的；两个速度的比值是一个确定的数，也只取决于拐角的大小．当夹角并不接近于π时，其中一个速度要比另一个速度大得多，这个较大的速度就是主流速度，它与湍流区的伸展方向相同(AO方向)．例如，在绕直角的流动中，沿平面AO的速度是沿BO速度的三十倍．

我们还可以指出，湍流区两边的流体压力差很小．例如，在绕直角的流动中，发现

$$p_1-p_2=0.003\rho U_1^2,$$

其中U_1是主流的速度(沿AO方向)，p_1是主流的压力，而p_2是沿BO流动的压力．

在两平板夹角为0的极限情形下，只有一块平板的边缘，流体沿着这块平板的两侧运动．湍流区的夹角$\alpha_1+\alpha_2=0$，即没有湍流区；沿该平板两侧流动的速度相等．当夹角AOB不断增加时，可以达到一个状态，即平面BO成为湍流区的下边界；这时夹角AOB已是钝角．随着夹角的进一步增加，湍流区的一侧继续以平面BO为界．这时只有流动的分离现象，其分离线沿着拐角的顶边．湍流区的张角总是有限的．

作为第二个例子，来研究从细长管末端射入无限空间的湍流射流问题，在该无限空间中充满着同一种流体．这种“浸没射流”的层流问题，在§23中已经解决了．在远大于管口尺寸的距离上

① 在这里以及在别的地方，我们所谈到的湍流射流横截面上的速度分布的实验结果，都是基于**混合长度理论**(见本节最后的脚注)经过计算整理的(托尔明 W. Tollmien, 1926)．混合长度理论包含着一个任意常数，其数值的选取是使理论结果与实验尽可能地吻合．

（以后我们只讨论这种情形），不论管口的实际形状如何，射流总是轴对称的。

现在来确定这种射流中湍流区的形状．取射流的轴线为 x 轴，并且用 R 表示湍流区的半径：我们要求确定出 R 作为 x 的函数（x 是从管口量起的）．和前面的例子一样，根据相似性分析，很容易直接定出这个函数．在远大于管口尺寸的距离上，管口的实际形状和尺寸不能影响射流的形状．因此在我们的讨论中，没有长度量纲的特征参数．于是和以前一样，R 必须正比于 x：

$$R = x\,\mathrm{tg}\alpha, \tag{35.2}$$

其中数值常数对所有的射流都是相同的．因此湍流区是一锥形；锥顶角 2α 的实验值为 $25°$ 到 $30°$（图 17）①．

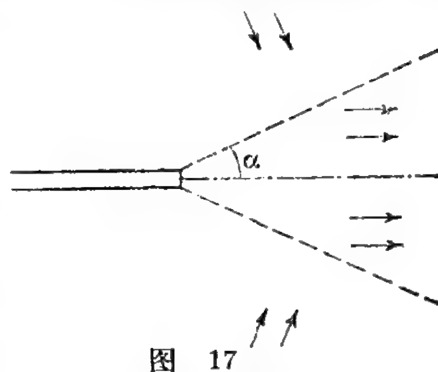


图 17

射流横截面上的（时间平均）速度分布具有下述特性．流动主要是沿射流方向．纵向速度分量随着离射流轴线的距离的增加而迅速地减小；仅仅在离开轴线 $0.35R$ 的距离上，纵向速度分量就减为 $\frac{1}{2}u_0$（u_0 是轴线上的速度），并且在湍流区的边界上，它是 $0.01u_0$ 的量级．横向速度分量在湍流区的横截面上各处的量级大致相同，而在湍流区的边界上，约为 $-0.025u_0$，是指向射流的．这个横向速度分量引起流入湍流区的流动．湍流区（对于给定的 α 角）外面的速度分布，可以从理论上来确定（见问题 1）．

射流中的速度也随离管口距离的增加而下降．这个衰减规律

---

① 实验上观测到常数 α 对管口初始条件（速度剖面）的某些依赖关系．有理由推测，这种依赖性是由管口有限尺寸的影响所引起的，而在更远的距离上，这种影响将会消失。

是很容易求得的．为了求出衰减规律，我们采用如下的方法．因为通过其中心在管口的球面的总动量通量必须与该球面的半径无关．而射流中的动量通量密度为 ρu^2 的量级，其中 u 是射流中某个平均速度的量级；从流体密度 ρ，速度 u 以及距离 x 能够组合成的量中，具有动量通量密度量纲的量只有这个 ρu^2．在射流的横截面中，u 明显不为零的这部分面积是 R^2 的量级．因此总动量通量为 ρu^2R^2 的量级．令 ρu^2R^2 等于常数，并设 $R=$ 常数 $\times x$，则得

$$u\sim 常数/x, \tag{35.3}$$

即速度的大小随着离开管口的距离而成反比地减小．

单位时间内通过射流区横截面的流量 Q 是该面积($\sim R^2$)与平均速度 u 乘积的量级．代入后求得①

$$Q=Bx. \tag{35.4}$$

因此，通过湍流区横截面的流量随 x 而增加，也就是一些流体好像被吸入湍流区②．式(35.4)中出现的常数可以确定如下：在管口尺度量级的距离上，Q 必须是单位时间内由管中流出的流量 Q_0，对于任何特定的射流，Q_0 是固定不变的．所以我们知道 $B\sim Q_0/a$，其中 a 给出管口的横向线度(例如，如果管口是圆形的，则 a 为半径)．于是可以写出

$$B=cQ_0/a, \tag{35.5}$$

其中 c 是数值常数，它只取决于管口的形状．如果管口是圆的，由实验求得 c 约为 1.5.

在射流长度方向上任何截面的流动，可由该截面上定义为 uR/ν 的雷诺数来表征．但是根据式(35.2)和(35.3)，乘积 uR 沿射

---

① 如果在很大的范围内变化的两个变量总是有相同的量级，则它们必须成正比．因此在这种情形(以及类似的情形)下，就能够准确地写成 $Q=$ 常数 $\times x$ 来代替 $Q\sim$ 常数 $\times x$.

② 通过任一横截于射流的无限平面，其总的质量流量是无限的，即射入无限空间的射流所带动的流体总量是无限的。

流为常数，所以该雷诺数在所有截面上都相同. 例如可以把它取成 $B/\rho\nu$. 出现在这里的常数 B 是确定射流中流动的唯一参数. 当射流“强度”Q_0 增加时（a 的值保持不变），雷诺数 $B/\rho\nu$ 最终会达到一个临界值，在这个临界值以后，流动立即在整个射流长度上变为湍流①.

问　　题

问题 1. 试确定射流中湍流区以外的平均速度.

解: 我们取球坐标 r, θ, ϕ, 以极轴沿射流轴线，原点取在射流的出口处. 因为射流是轴对称的，所以平均流动的速度分量 u_ϕ 为零，而 u_θ 和 u_r 只是 r 和 θ 的函数. 根据层流射流问题中采用的方法一样（§23），经过同样的讨论表明，u_θ 和 u_r 必须是 $u_\theta=f(\theta)/r$, $u_r=F(\theta)/r$ 的形式. 在湍流区以外是势流，即 $\nabla\times\boldsymbol{u}=0$, 所以

$$\partial u_r/\partial\theta-\partial(ru_\theta)/\partial r=0.$$

但是 ru_θ 与 r 无关，于是

$$\partial u_r/\partial\theta=(1/r)dF/d\theta=0,$$

因此 $F=$ 常数 $=-b$, 即

$$u_r=-b/r. \tag{1}$$

---

① 对于各种湍流流动的类型，为了进行更详细的计算，通常基于有关湍流粘性系数对平均速度梯度的依赖关系的假定. 采用某种“半经验的”理论. 例如在普朗特理论中（对于平面流动）假定

$$\nu_{湍}=l^2\,|\partial u_x/\partial y|,$$

其中 l（称为**混合长度**）对坐标的依赖关系是根据相似性分析的结果来选取的；又如在自由湍流射流中，我们设 $l=cx$, c 是一个经验常数. 这种理论通常与实验能很好地吻合，所以对内插法计算是很有用的. 但是不可能给出表征各个理论的经验常数的普适值. 例如，对于各种特定的情形，混合长度 l 与湍流区横向线度的比值有不同的选取. 还应该指出，对于湍流粘性系数，有各种不同的表达式能够与实验结果很好地吻合.

有关这些理论的更详尽的讨论，可参阅 Л. Г. Лойцянский, *Аэродинамика пограничного слоя*, Гостехиздат, 1941; Г. Н. Абрамович, *Турбулентные свободные струи жидкостей и газов*, Госэнергоиздат, 1948; H. Schlichting, *Boundary Layer Theory*, Pergamon Press, *London* 1979.

根据连续方程

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 u_r)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(u_\theta\sin\theta)=0,$$

就得到

$$f=\frac{常数-b\cos\theta}{\sin\theta}.$$

如果 $\theta=\pi$ 时速度有限，则积分常数一定为 $-b$.（因为问题中的解只涉及湍流以外的空间，而 $\theta=0$ 在湍流区内，所以当 $\theta=0$ 时 f 为无穷是没有关系的.）因此

$$u_\theta=-\frac{b(1+\cos\theta)}{r\sin\theta}=-\frac{b}{r}\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\theta. \tag{2}$$

射流方向的速度分量(u_x)以及速度的绝对值为

$$u_x=\frac{b}{r}=\frac{b\cos\theta}{x},\ u=\frac{b}{r\sin\frac{1}{2}\theta}. \tag{3}$$

常数 b 可以和式(35.4)中的 B 联系起来. 让我们来研究由湍流区形成的一段截锥，它以该锥的两个无限接近的横断面为界. 单位时间内进入该段截锥的流体质量为

$$dQ=-2\pi r\rho\sin\alpha\cdot u_\theta dr=2\pi b\rho(1+\cos\alpha)dr,$$

而根据公式(35.4)，我们有

$$dQ=Bdx=B\cos\alpha dr.$$

比较这两个表达式，则得

$$b=\frac{B\cos\alpha}{2\pi\rho(1+\cos\alpha)}. \tag{4}$$

在湍流区的边界上，速度 $\boldsymbol{u}$ 指向湍流区的内部，它与 x 轴正向的交角为 $\frac{1}{2}(\pi-\alpha)$.

现将湍流区内部的平均速度 $\bar{u}_x$（定义 $\bar{u}_x=Q/\pi\rho R^2=B/\pi\rho x\operatorname{tg}^2\alpha$）与边界上的速度$(u_x)_{势}$进行比较. 取式(3)中的第一个方程，令 $\theta=\alpha$，求得

$$(u_x)_{势}/\bar{u}_x=\frac{1}{2}(1-\cos\alpha).$$

当 $\alpha=12^\circ$ 时，这个比值为 0.011，即湍流区边界上速度远小于该区域内部的平均速度.

问题 2. 设一从无限长狭缝中喷出的浸没湍流射流，试确定其尺度变化

和速度变化的规律.

解: 根据与上述轴式射流同样的理由, 我们断定湍流是以两个平面为界,这两个平面沿着狭缝相交, 即射流的半宽度为 $Y=x\mathrm{tg}\alpha$. 射流中动量通量(沿狭缝的单位长度上)为 $\rho u^2 Y$ 的量级. 于是平均速度 u 对 x 的依赖关系为

$$u=\text{常数}/\sqrt{x}.$$

通过湍流区横截面的流量为 $Q\sim\rho uY$, 因此

$$Q=\text{常数}\times\sqrt{x}.$$

如平面平行射流的张角为2α, 则实验数据给出 α 的值为 25°—33°(参阅本节第三条脚注).

§36. 湍流尾迹

在绕物体的流动中,当雷诺数大大地超过临界值时,物体后面将形成一个长长的湍流区, 称为**湍流尾迹**. 在远大于物体线度的距离上, 根据简单的推理就能使我们来确定该尾迹的形状和其中流体速度减小的规律(普朗特,1926).

和§21 中研究层流尾迹一样,以 $\boldsymbol{U}$ 表示来流速度, 取 $\boldsymbol{U}$ 的方向为 x 轴向. 在对湍流涨落取平均值以后, 任一点上的流体速度可写成 $\boldsymbol{U}+\boldsymbol{u}$. 以 a 表示尾迹的某个平均宽度,我们来求 a 作为 x 的函数. 如果没有升力, 则在远离物体的距离上, 尾迹是轴对称的,所以其横截面为圆;在这种情形下, a 可以是尾迹的半径. 如果有升力存在,就使得 yz 平面上出现了某一特定的方向, 所以尾迹在离开物体的任何距离上都不是轴对称的.

尾迹中流体的纵向速度分量是U的量级, 而横向速度分量是湍流速度某个平均值 u 的量级. 所以流线与 x 轴之间的夹角是 u/U 的量级. 正如我们所知, 尾迹边界是有旋湍流运动的流线不能逾越的界线. 由此得出尾迹边界与 x 轴之间的夹角也是 u/U的量级. 这就是说我们能够写成

$$da/dx \sim u/U. \tag{36.1}$$

其次，我们来利用式(21. 1)和(21. 2)，这些公式是用尾迹中流体速度的积分来给出作用在物体上的力（这里的速度是指它的平均值）. 在这些积分中，积分区域是 a^2 的量级. 所以对积分进行估计后，可得出 $F \sim \rho U u a^2$，其中 F 是阻力或升力的量级. 因此

$$u \sim F/\rho U a^2. \tag{36.2}$$

将其代入式(36. 1)，得

$$da/dx \sim F/\rho U^2 a^2,$$

由此进行积分得

$$a \sim (Fx/\rho U^2)^{1/3}. \tag{36.3}$$

所以尾迹的宽度随离开物体的距离的立方根而增加. 对于速度u，根据式(36. 2)和(36. 3)，我们有

$$u \sim (FU/\rho x^2)^{1/3}, \tag{36.4}$$

即尾迹中的流体平均速度与 $x^{2/3}$ 成反比.

在尾迹的任何横截面上，流动由雷诺数 $R \sim au/\nu$ 来表征. 将式(36. 2)和(36. 3)代入，得

$$R \sim F/\nu\rho U a \sim (F^2/\rho^2 U x \nu^3)^{1/3}.$$

可以看出，这里与湍流射流中的情形不同，雷诺数沿尾迹不是常数. 在离开物体足够远的距离上，R 变得如此之小，以致尾迹中的流动不再是湍流了. 再往后，将一直是层流尾迹. 层流尾迹的性质已经在§21 中研究过了.

在§21 的问题 2 中，我们已经得到描写尾迹外面远离物体处的流动的公式. 像层流尾迹外面的流动一样，在湍流尾迹外面的流动中，这些公式同样有效.

这里可以指出物体周围速度分布的若干普遍性质. 不论是湍流尾迹的内部或外部，两者中的速度（我们总是指平均速度 $\mathbf{u}$）都随着离开物体的距离增加而减小. 但是纵向速度 u_x 在尾迹的外

面要比在尾迹里面减小得更快（$\sim 1/x^2$）．于是在远离物体的地方，可以假定尾迹外面的 u_x 为零．我们可以这样说，u_x 是从尾迹轴线上的某个最大值下降到尾迹边界上的零值．边界上的横向速度分量 u_y、u_z 与它们在尾迹里面的量级相同，在离开物体的给定距离 x 上，u_y 和 u_z 随着离开尾迹的距离增加而迅速地减小．

§37. 儒可夫斯基定理

在物体后面尾迹的厚度远小于其宽度的情形下，上节末所描写的物体周围的速度分布就不适用了．在绕流物体的厚度（沿 y 方向）远小于其宽度（沿 z 方向）时，不管长度的大小（沿流动方向，即 x 方向）如何，就会形成这种类型的尾迹．也就是说，现在要研究对这样一些物体的绕流问题，物体上垂直流向的横断面是非常细长的．作为特例，机翼就是这类物体，其宽度（或称翼展）远大于它们的其它线度．

在这种情形下，对于垂直于湍流尾迹平面的速度分量 u_y，显然没有理由认为它在尾迹厚度量级的距离上应该有显著地减小．相反地，速度分量 u_y 在尾迹中以及在离开尾迹相当远的距离（翼展的量级）上，都有同样的量级．当然，我们在这里假定升力不为零，否则的话，横向速度 u_y 实际上为零．

现在来研究上述流动所产生的垂直升力 F_y．根据公式（21.2），F_y 由积分

$$F_y = -\rho U \iint u_y dy dz \tag{37.1}$$

给出，这里由于 u_y 分布的性质，因此必须在整个横截面上积分．而且，由于尾迹的厚度（在 y 方向）很小，而尾迹内的速度 u_y 并不远大于它外面的值，所以将整个 y 上的积分改写成尾迹以外 y 上的积分，就可以有足够的精确度，即

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_y dy \approx \int_{y_1}^{\infty} u_y dy + \int_{-\infty}^{y_2} u_y dy,$$

其中 y_1 和 y_2 是尾迹上、下边界的坐标(图 18).

然而尾迹以外是势流，有 $u_y=\partial\phi/\partial y$；并且在无穷远处有 $\phi=0$，于是得到

$$\int u_y dy = \phi_2 - \phi_1,$$

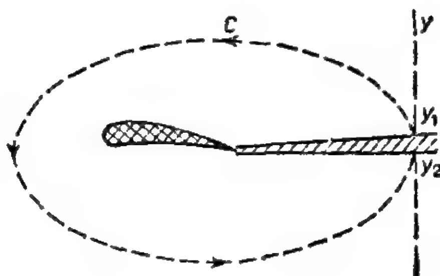


图 18

其中 ϕ_2 和 ϕ_1 是速度势在尾迹两侧的值. 如果用间断面来代替薄尾迹，则可以说 $\phi_2-\phi_1$ 是间断面上速度势的跃变. 然而导数 $u_y=\partial\phi/\partial y$ 必须保持连续. 因为垂直于尾迹曲面的速度分量间断就意味着有一定量的流体流入尾迹；但是在尾迹厚度忽略不计的近似中，流入的流量必须为零. 所以我们可以用切向间断面来代替尾迹. 其次，在同样的近似程度下，压力在尾迹面上也必须是连续的. 因为在一级近似中，根据伯努利方程得出压力的变化为 $\rho U u_x=\rho U\partial\phi/\partial x$，所以导数 $\partial\phi/\partial x$ 也必须连续. 然而导数 $\partial\phi/\partial z$，即机翼跨度方向的速度一般说来是间断的.

因为导数 $\partial\phi/\partial x$ 是连续的，间断值 $\phi_2-\phi_1$ 只取决于 z 而与沿尾迹的坐标 x 无关. 所以我们有下面的升力公式:

$$F_y = -\rho U \int (\phi_2 - \phi_1) dz. \tag{37.2}$$

对整个 z 从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 的积分可以只在尾迹的宽度上进行积分(显然，在尾迹以外 $\phi_2-\phi_1=0$).

这个公式还可以写成稍为不同的形式. 为此我们指出，利用众所周知的标量函数梯度积分的性质，可以将差值 $\phi_2-\phi_1$ 写成曲线积分

$$\oint (\nabla\phi)\cdot d\boldsymbol{l} = \oint (u_y dy + u_x dx),$$

其中积分曲线是从点 y_1 出发，绕过物体，终止于点 y_2，因此积分曲线经过的点都在势流区域内．因为尾迹很薄，我们可以用从 y_2 到 y_1 的小线段来封闭积分曲线，这样，除去更高阶的小量之外，不会改变上述曲线积分值．用 Γ 表示环绕物体的闭合曲线 C 的速度环量(图 18)，则有

$$\Gamma = \oint \boldsymbol{u} \cdot d\boldsymbol{l} = \phi_2 - \phi_1, \tag{37.3}$$

以及关于升力的公式①

$$F_y = -\rho U \int \Gamma dz. \tag{37.4}$$

在 1906 年，儒可夫斯基首先导出上述公式，给出了升力和环量之间的关系，这就是**儒可夫斯基定理**②.

问　　题

问题 1. 设有一无限长圆柱体在横向绕流中形成湍流尾迹．试确定该湍流尾迹变宽的规律．

解：每圆柱体单位长度上的阻力 f_x 是 ρUuY 的量级．将它与关系式(36.1)结合起来，我们求得尾迹的宽度 Y 为

$$Y = A\sqrt{(xf_x/\rho U^2)}, \tag{1}$$

其中 A 为常数．尾迹中的平均速度 u 按

$$u \sim \sqrt{(f_x/\rho x)}$$

的规律而减小．雷诺数

$$R \sim Yu/\nu \sim f_x/\rho U\nu$$

与 x 无关，所以没有层流尾迹．

可以指出，根据实验结果，式(1)中的常数系数 $A=0.93$(Y 是尾迹的半宽度；如果 Y 取为这样一个距离，在该距离上速度 u_x 减小为最大速度（在尾

① 选取速度环量的符号时，总是以逆时针路径的积分为准．公式(37.3)的符号还决定于选取的流动方向．我们总是假定流动沿 x 轴的正向(从左到右)．

② 有关这个定理应用到流线型机翼的情形，请参阅 § 46.

迹中心上)的一半，则 $A=0.41$)。

问题 2. 设有一无限长物体在横向绕流中形成尾迹，试确定该尾迹外面的流动.

解: 现选用柱坐标，其 z 轴沿物体的长度方向.

尾迹外面是势流，将速度势记作 Φ，用以区别柱坐标中的角 ϕ. 像 § 21 中问题 2 一样，我们断言，必定存在

$$\oint \boldsymbol{u}\cdot d\boldsymbol{f}=\oint (\nabla\Phi)\cdot d\boldsymbol{f}=f_x/\rho U,$$

现在的积分区域是一个半径很大的单位长的圆柱表面，圆柱的轴线沿 x 轴向，而 f_x 是每单位长物体上的阻力. 满足这种条件的二维拉普拉斯方程 $\Delta\Phi=0$ 的解为:

$$\Phi=(fx/2\pi\rho U)\ln r.$$

其次. 根据公式(37.2)，我们有升力

$$f_y=\rho U(\Phi_1-\Phi_2).$$

在拉普拉斯方程的所有解中，随距离的改变而减小最慢的以及在 $\phi=0$ 的平面上有间断的解为 $\Phi=$常数$\times\phi$; 因为$\phi_2-\phi_1=2\pi$，所以常数为$-f_y/2\pi\rho U$. 流动由上述两个解之和给出，即

$$\Phi=\frac{1}{2\pi\rho U}(f_x\ln r-\phi f_y). \tag{1}$$

速度 $\boldsymbol{u}$ 的柱坐标分量为

$$u_r=\partial\Phi/\partial r=f_x/2\pi\rho Ur,$$
$$u_\phi=(1/r)\partial\Phi/\partial\phi=-f_y/2\pi\rho Ur. \tag{2}$$

速度 $\boldsymbol{u}$ 与 r 方向交成一个不变的角度 $\mathrm{tg}^{-1}(f_y/f_x)$.

问题 3. 当存在升力时，试确定无限长物体后面尾迹的弯曲规律.

解: 如果存在升力，则尾迹(当作间断面)在 xy 平面上是弯曲的. 确定尾迹曲线的函数 $y=y(x)$ 由方程

$$dx/(u_x+U)=dy/u_y$$

给出. 根据问题 2 中式(2)，代之以 $u_y\approx-f_y/2\pi\rho Ux$，同时与$U$相比略去 u_x，则得

$$dy/dx=-f_y/2\pi\rho U^2x,$$

由此

$$y=\text{常数}-(f_y/2\pi\rho U^2)\ln x.$$

§ 38. 各向同性湍流

我们在 § 33 中已经提到过湍流的一种特殊情形，即完全均匀和各向同性的湍流，其整个流体中的平均速度为零. 这种流动可以想像成流体受到剧烈地扰动后，再任其自由地运动. 当然，这种运动将随着时间的推移而衰减.

进一步地研究各向同性湍流，特别是确定其随时间衰变的规律，都是基于洛强斯基(Л. Г. Лойцянский, 1939)首先导出的守恒定律. 这个定律只对各向同性的湍流成立，它是角动量守恒这一普遍定律的一个推论，可以导出如下：

设在无界的流体中分离出某个很大的体积，我们来研究这个体积中流体的总角动量$\boldsymbol{M}$. $\boldsymbol{M}$具有某个随机值，一般说来是不为零的. 由于该体积中流体与周围流体的相互作用，所以$\boldsymbol{M}$并不严格地保持不变. 但是由于相互作用是一种表面作用，显然$\boldsymbol{M}$发生显著变化所需的时间T必须随所选取体积的线度L的增加而增加. 时间T和线度L可以任意大，从而在这种意义上角动量$\boldsymbol{M}$是守恒的.

为了以后的方便，假定选定的流体体积包含在一个具有固定固壁的容器中，显然这个很大体积的表面上的边界条件，对该体积中我们所关心的流动性质没有任何影响.

根据一般的定义，总角动量张量 M_{ik} 等于对整个体积的积分

$$\rho\int(x_iv_k-x_kv_i)dV.$$

将上述积分作如下变换：

$$\int x_kv_idV=\int\frac{\partial}{\partial x_l}(x_ix_kv_l)dV-\int x_ix_k\frac{\partial v_l}{\partial x_l}dV-\int x_iv_kdV.$$

将上式右边的第一个积分变成曲面积分，就能看出其为零，因为流体界面上的法向速度为零，所以有 $v_kdf_k=(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})df=0$. 如果流

体是不可压缩的($\nabla\cdot\bar{v}=0$)，则第二个积分也为零．所以

$$\int x_k v_i dV = -\int x_i v_k dV,$$

并能写出

$$M_{ik}=2\rho\int x_i v_k dV.$$

M_{ik} 所有分量的平方和等于角动量矢量

$$\boldsymbol{M}=\rho\int(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v})dV$$

的大小的平方的两倍，于是有

$$M^2=2\rho^2\left[\int x_i v_k dV\right]^2.$$

积分的平方可以写成二重积分：

$$M^2=2\rho^2\iint x_i x'_i v_k v'_k dV dV'.$$

最后我们指出，上述表达式可以改写成

$$M^2=-\rho^2\iint(x_i-x'_i)^2 v_k v'_k dV dV';\tag{38.1}$$

包含平方 x_i^2 和 $x_i'^2$ 的积分为零，这是由于

$$\iint x_i'^2 v_k v'_k dV dV'=\int x_i'^2 v'_k dV'\int v_k dV,$$

而且因为固定容器中不可压缩流体的总动量为零，有

$$\int v_k dV=0.$$

式 (38.1) 中被积函数的因子 $v_k v'_k=\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}'$ 是速度的标积，这两个速度对应点的坐标为 x_k 和 x'_k，这两个点相隔的距离为 $r=\sqrt{(x_k-x'_k)^2}$．在上述的体积中，将这个标积对点 x_k 和 x'_k 所有可能的位置（给定 r）取平均：这种平均和 § 33 中定义关联函数所采用的平均相同．因为该流动是各向同性的，所以量 $\overline{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}'}$ 只是 r 的函数．$\overline{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}'}$ 随 r 的增加而迅速地减小，这是因为相距很远两点

上的湍流速度，可以假定在统计上是独立的：即两个速度乘积的平均值简化为两个速度平均值的乘积，而速度本身的平均值为零（在所讨论的流动中，平均速度处处为零）。

在式(38.1)的积分号下进行这种平均，得到

$$M^2 = \rho^2 \int f dV, \tag{38.2}$$

其中

$$f = -\int \overline{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}'} \, r^2 dV'.$$

上式 f 的被积函数随着 r 的增加而迅速地减小，所以积分是收敛的；也就是说，当积分区域的线度 L 趋向无限时，f 趋向一个有限的极限．因为这里的流动是均匀的①，f 在整个流体的范围中处处都相同，所以就能够写成 $M^2 = \rho f V$．可以指出，由此得出角动量随运动流体体积的平方根而增加，并不是与该体积成正比．这个原因在于总角动量是大量的统计上独立分量（各个小部分上流体的角动量）之和，这些分量的平均值不为零．

由此我们断定，在各向同性的湍流中，M的不变性就是

$$\int \overline{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}'} \, r^2 dV' = \text{常数}. \tag{38.3}$$

这就是**洛强斯基定律**②．

在线度相当于湍流尺度 l 量级的区域中（这个区域的体积 $\sim l^3$），式(38.3)的被积函数明显地异于零，其量级为 v^2/l^2．因此根据式(38.3)有

$$v^2 l^5 = \text{常数}. \tag{38.4}$$

① 除去表面附近很小一部分以外的整个区域．

② 最近已不止一次地提出了这样的疑问：根据在间距非常大的两点上的速度关联的性质，该守恒定律(38.3)是否还能应用．例如，如果这个关联减小得不够快，那么积分(38.3)就有可能发散．但是直到现在，整个问题似乎还不太清楚．

利用这个关系式，可以确定出各向同性湍流随时间的衰变规律. 为此来估算一下单位体积流体动能对时间的导数：一方面它在量级上可以写成 $\rho v^2/t$；另一方面，它又必须等于单位体积流体在单位时间内的能量耗散. 根据公式(31.1)，$\rho\epsilon\sim\rho v^3/l$(其中 v 是特征速度). 如果这两个表达式在量级上相当，则得

$$l\sim vt. \tag{38.5}$$

将式(38.5)代入式(38.4)，可得

$$v=常数/t^{5/7}. \tag{38.6}$$

因此在各向同性的湍流中，速度随时间的衰减是反比于 $t^{5/7}$ 对于 l，我们有

$$l=常数\times t^{2/7}, \tag{38.7}$$

即湍流的外尺度随 $t^{2/7}$ 而增加(柯尔莫戈罗夫，1941)。

根据公式(38.6)和(38.7)，雷诺数 $R\sim vl/\nu$ 随 $t^{-3/7}$ 而减小，在足够长的时间之后，雷诺数变得如此之小，以致粘性开始显得重要了. 至此，我们能够确定出能量耗散. 一方面根据常用的公式(16.3)，给出

$$\epsilon=\frac{1}{2}\nu\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)^2\sim\frac{\nu v^2}{l^2},$$

而另一方面又有 $\epsilon\sim v^2/t$. 将上两式作比较，就得到

$$l\sim\sqrt{(\nu t)}, \tag{38.8}$$

然后从式(38.4)得

$$v=常数/t^{5/4}. \tag{38.9}$$

这些公式是在粘性起支配作用时，给出了均匀湍流后期衰变的规律，它们是由米尔里奥希科夫(М. Д. Миллиощиков)在1939年得到的.

让气流通过(有规则地排列着大量小孔的)格栅，就能产生各向同性的湍流. 我们用 $\boldsymbol{U}$ 来表示原有流动的速度，并取 x 轴沿 $\boldsymbol{U}$

的方向，同时用 $\boldsymbol{U}+\boldsymbol{v}$ 表示真正的速度，所以 $\boldsymbol{v}$ 是我们所感兴趣的湍流速度．如果引入一个以速度 $\boldsymbol{U}$ 运动的参考系，则相对于这个参考系，流体以速度 $\boldsymbol{v}$ 作湍动．当离开格栅的距离增加时，平均湍流（具有速度 $\boldsymbol{u}=\overline{\boldsymbol{v}}$）衰变得比涨落流动更快．这是因为平均流动具有与格栅孔径尺寸 a 同量级的尺度；下面将看到，格栅孔径的尺度 a 远小于涨落流动的尺度．所以在离格栅足够远的距离上，平均速度几乎为零，这时湍流速度就是涨落速度．在这样的距离上，尺度小于 x（但并不需要小于湍流的外尺度）的整个区域内的湍流可以当作是完全各向同性的．在该运动参考系中湍流随时间的衰变相当于在原来固定参考系中湍流因离开格栅距离的增加所引起的衰变．这种衰变的规律由上面建立的公式给出，其中只需用 x/U 来代替 t 就行了．请记住，在离格栅为 a 量级的距离上（a 是格栅开孔的尺寸），我们必须有 $l\sim a$，所以公式(38.7)可以改写成

$$l\sim a(x/a)^{2/7}.$$

对于速度，则由式(38.5)得 $v\sim lU/x$，由此

$$v\sim U(a/x)^{5/7}.$$

问　　题

在粘性起主要作用的阶段中，试用方程(33.17)求出各向同性湍流中 $\overline{v_{r1}v_{r2}}$ 衰变的定量规律．

解：在这种情形下，我们可以略去式(33.17)中 B_{rrr} 的项，因为它是（小）速度的更高阶量．现引入量

$$b_{rr}\equiv\overline{v_{r1}v_{r2}}=\frac{1}{3}\overline{v^2}-\frac{1}{2}B_{rr}$$

（见式(33.16)），我们得到 b_{rr} 的方程为

$$\frac{\partial b_{rr}}{\partial t}-\frac{2\nu}{r^4}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^4\frac{\partial b_{rr}}{\partial r}\right)=0.$$

对于这个方程，我们有兴趣的解是

$$b_{rr}=\text{常数}\times e^{-r^2/8\nu t}/t^{5/2};$$

参阅导热方程的类似解(51.6)．这个解给出了函数 B_{rr} 在某些初始条件下的渐近形式，这些初始条件是指 B_{rr} 是个任意函数，它随着 r 的增加必须减小得足够快[正如初始时刻热量集中于空间一个小区域内的导热问题一样，在那里由公式(51.6)给出了热传播的渐近规律]．

第四章 边 界 层

§39. 层流边界层

我们已经几次提到这一事实：很大的雷诺数等价于很小的粘性系数．因此，如果雷诺数很大，流体就可以看作是理想流体．但是，当考虑贴近固壁的流动时，就不能采用这种近似了．因为对于理想流体，边界条件只要求法向速度分量为零，与表面相切的速度分量一般保持为有限值；而对于粘性流体，固壁上的速度则必须完全为零．

由此，我们可以得出结论：在大雷诺数的情形下，几乎只是在贴近壁面的一个薄层里，速度降到了零．这一层称为**边界层**，它的特征是其中存在相当大的速度梯度．边界层中的流动既可以是流，也可以是湍流．在本节中，我们将研究层流边界层的性质．当然，这一层的边界并不十分明显，从边界层中的层流到流体的主流是连续过渡的．

边界层内速度的迅速减小最终归因于粘性，即使 R 很大，粘性也不能忽略．从数学上说，这是由于边界层内速度梯度很大，因而即便 ν 很小，运动方程中包含速度空间导数的粘性项还是个大量．边界层的数学理论是由普朗特(L. Prandte)创立的．

我们来推导层流边界层内流体的运动方程．为简单起见，我们考虑沿着表面上一块平面的二维流动．将该平面取作 xz 平面，取 x 轴沿流动方向，速度分布便与 z 无关，并且不存在速度的 z 分量．

于是，准确的纳维-斯托克斯方程和连续方程就是

$$v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\right), \tag{39.1}$$

$$v_x\frac{\partial v_y}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\nu\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}\right), \tag{39.2}$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}=0. \tag{39.3}$$

这里假设流动为定常的，所以时间导数被省略了.

因为边界层很薄，显然边界层内的流动应当大体平行于表面，即与 v_x 相比，速度 v_y 是一小量(这从连续方程可直接看出).

速度沿着 y 轴迅速地改变，它可在边界层厚度 δ 量级的距离上发生显著变化. 另一方面，速度沿 x 轴则变化缓慢，它只有在经历了本问题特征长度(比如说，物体的线度) l 量级的距离后才有显著改变. 因此，速度对 y 的导数与其对 x 的导数相比是个很大的量. 由此可见，方程(39.1)中的导数 $\partial^2 v_x/\partial x^2$ 与 $\partial^2 v_x/\partial y^2$ 相比可以略去；对比(39.1)和(39.2)，我们看出导数 $\partial p/\partial y$ 相对于 $\partial p/\partial x$ 为一小量(比值与 v_y/v_x 同量级). 在所讨论的近似程度下，我们即可设

$$\frac{\partial p}{\partial y}=0, \tag{39.4}$$

也就是，可以认为在边界层内不存在横向压力梯度. 换句话说，边界层内的压力等于主流的压力 $p(x)$，因此对于求解边界层问题来说，它是 x 的给定函数. 在方程(39.1)中，我们现在可以将 $\partial p/\partial x$ 写成全导数 dp/dx；这个全导数还可以用主流速度$U(x)$来表示。因为边界层外部为势流，伯努利方程成立，即

$$p+\frac{1}{2}\rho U^2=\text{常数},$$

由此有

$$\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx}=-U\frac{dU}{dx}.$$

于是，我们得到层流边界层内运动方程的形式为

$$v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}-\nu\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}=-\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx}$$

$$=U\frac{dU}{dx},\tag{39.5}$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}=0.$$

不难证明，这些方程虽然是对沿平面固壁的流动导出的，但它们在任意二维流动(即无限长且有任意横截面柱体的横向绕流)的更一般情况下仍然有效．此时，x 是从横截面周线上某点量起的沿周向的距离，y 是离开表面的距离．

设 U_0 是问题的特征速度(例如，主流在无穷远处的速度)．我们引入无量纲变数 x', y', v_x', v_y' 代换坐标 x, y 和速度 v_x, v_y，即

$$x=lx',\ y=ly'/\sqrt{R},\ v_x=U_0v'_x,\ v_y=U_0v_y'/\sqrt{R}\tag{39.6}$$

(并且相应地有 $U=U_0U'$)，其中 $R=U_0l/\nu$．因而，方程(39.5)成为下列形式：

$$v_x'\frac{\partial v'_x}{\partial x'}+v_y'\frac{\partial v'_x}{\partial y'}-\frac{\partial^2 v_x'}{\partial y'^2}=U'\frac{dU'}{dx'},\tag{39.7}$$

$$\frac{\partial v'_x}{\partial x'}+\frac{\partial v'_y}{\partial y'}=0.$$

这些方程(以及它们的边界条件)不含粘性系数，这表明它们的解和雷诺数无关．因此，我们可得出以下重要结论：当改变雷诺数时，边界层内的整个流动图象仅仅是经历了一个相似变换，纵向距离和速度保持不变，而横向距离和速度按 $1/\sqrt{R}$ 倍改变．

其次，我们还可以断定，从解方程(39.7)得到的无量纲速度 v'_x，v'_y，其量级必定为 1，因为它们和 R 无关．在 x', y' 坐标中，边界层厚度 δ 的量级同样为 1．因此，由公式(39.6)可以得出结论：

$$v_y\sim\frac{U_0}{\sqrt{R}},\tag{39.8}$$

即，横向速度与纵向速度的比值和$\sqrt{R}$成反比，以及

$$\delta \sim \frac{L}{\sqrt{R}}, \tag{39.9}$$

即，随着雷诺数的增大，边界层厚度以$1/\sqrt{R}$的规律减小.

现将边界层方程应用于沿平板的平面平行流动. 令平板平面为 $x>0$ 的 xz 半平面(于是，板的前缘为直线 $x=0$)，并假设平板在 x 正方向延伸到无穷远. 在此情况下，主流速度显然不变($U=$常数). 方程(39.5)变成

$$v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}=\nu\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2},$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}=0. \tag{39.10}$$

平板表面上的边界条件是两个速度分量为零，即对 $y=0, x\geqslant 0$，有 $v_x=v_y=0$. 远离平板时，速度必须渐近地趋于来流速度，即对$y\to \pm\infty$，有 $v_x=U$. 我们已经知道，在边界层方程的解中，v_x/U和 $v_y\sqrt{l/U\nu}$ 只能是$x'=x/l$ 和 $y'=y\sqrt{U/l\nu}$ 的函数. 但在所讨论的无限平板问题里，并不存在特征长度 l . 因此，v_x/U 只能依赖于 x' 和 y' 的某个不含 l 的组合，即 $y'/\sqrt{x'}=y\sqrt{U/\nu x}$. 类似地，乘积 $v'_y\sqrt{x'}$ 必须是$y'/\sqrt{x'}$ 的函数. 于是，我们可以寻求下面形式的解:

$$v_x=Uf(y\sqrt{U/\nu x}),\ v_y=\sqrt{U\nu/x}\ f_1(y\sqrt{U/\nu x}), \tag{39.11}$$

其中，f 和 f_1是某类无量纲函数. 利用(39.10)的第二个方程，可以用 f 来表示 f_1，从而问题化为求一个单变量

$$\xi=y\sqrt{U/\nu x}$$

的函数 f①.

① 容易证明，如果用$f(\xi)=\varphi'(\xi)$定义一个函数$\varphi(\xi)$，就得到$f_1(\xi)=\frac{1}{2}(\xi\phi'-\phi)$，而 ϕ 满足方程 $\phi\phi''+2\phi'''=0$ 和边界条件: $\xi=0, \phi=\phi'=0; \xi=\infty, \phi'=1$.

下面的讨论只涉及纵向速度 v_x 的分布(因为 v_y 很小). 即使在未求出函数 f 的情况下，我们也能从公式(39.11)得出一条重要结论. v_x 在平板表面上为零，当 f 的自变量变到一给定值，即当 $y\sqrt{U/\nu x}$ =任一给定常数时，速度 v_x 增加到 U 的一个确定分数。因此，我们可以断定，沿平板流动的边界层厚度在量级上为

$$\delta\sim\sqrt{\nu x/U}. \tag{39.12}$$

这样，随着离开平板前缘向后移动，δ 就以距前缘距离的平方根的方式增长.

函数 f 可以用数值积分法求出，图 19中画出了该函数的曲线图. 我们看出 f 很快地趋于它的极限值 1①.

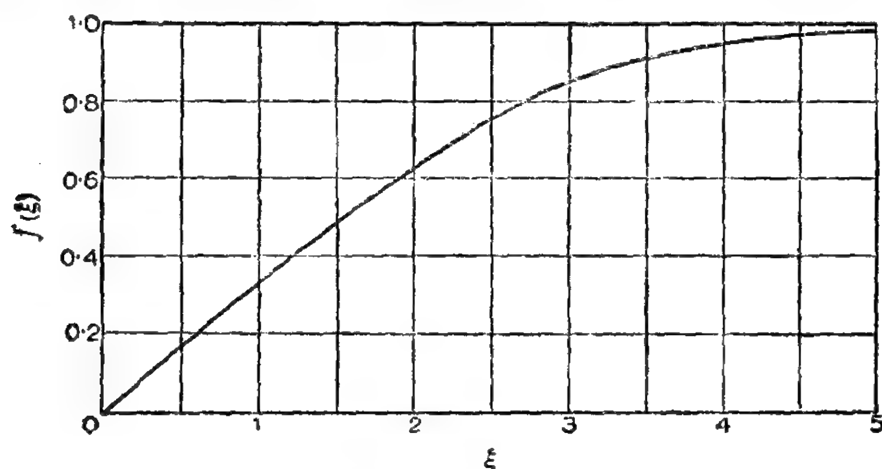


图 19

平板表面单位面积上的摩擦力是

$$\sigma_{xy}=\eta\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_{y=0}.$$

数值计算给出

$$\sigma_{xy}=0.332\sqrt{\eta\rho U^3/x}. \tag{39.13}$$

---

① 边界层的厚度有时用位移厚度 δ^* 来表征，它定义为

$$\int_0^\infty(U-v_x)\,dy=U\delta^*.$$

它等于 $1.72\sqrt{\nu x/U}$.

如果平板长度为 l（在 x 方向），那么，在 z 方向单位长度的平板上，总摩擦力为

$$F=2\int_0^l \sigma_{xy}dx.$$

因为平板是两面和流体相接触，故乘以 2．以(39.13)式代入，就得到

$$F=1.328\sqrt{\eta\rho lU^3} \tag{39.14}$$

（H·布拉修斯，1908）．可以指出，摩擦力正比于主流速度的 3/2 次幂．公式(39.14) 只能应用于相当长的平板，此时雷诺数 Ul/ν 才有相当大的值．习惯上将阻力表示为阻力系数，它定义为无量纲比值

$$C=F\Big/\frac{1}{2}\rho U^2\cdot 2l. \tag{39.15}$$

按照(39.14)式，对于沿平板的层流，这个量反比于雷诺数的平方根：

$$C=1.328/\sqrt{R}. \tag{39.16}$$

上面得到的定量公式当然只是对沿平板的流动而言的．但是，像(39.8)和(39.9)这样一些定性结果，则对沿任何形状物体的流动都成立．在这种情况下，l 是物体在流动方向上的尺度．

我们可以对两种情况的边界层作点特别说明．假设有一个很大半径的平面圆盘，在流体中绕垂直于自身平面的轴旋转，那么，要估算边界层厚度，我们必须在(39.12) 中用 Ωx 代换 U，其中 Ω 是旋转角速度．于是我们得到

$$\delta\sim\sqrt{\nu/\Omega}. \tag{39.17}$$

我们看出，按照在§23 中所得到的这一问题的准确解，边界层厚度可以认为在整个圆盘表面上为一常数．由边界层方程所得的作用在圆盘上的摩擦力值，当然就是(23.4)．因为这个式子是准确的，所以对 R 为任何值的层流都成立．

最后，我们来考察流体在靠近管道入口处的壁上所形成的层流边界层．流体在进入管道时，其速度分布通常是在整个横截面上近乎均匀的，速度降到零这一事实完全发生在边界层内．当流体从入口处向管内越走越远时，更加靠近轴线的流体层才相继受到阻滞．因为通过每个截面的流体质量是相同的，而流动的中心部分仍保持速度均匀，则随着中心部分的直径不断减小，这部分流动必然不断加速．这种情形一直继续到泊肃叶速度分布已渐近地达到为止；因此，泊肃叶速度分布只有在离管口的一定距离上才会出现．可以很容易地确定“进口段”长度 l 的量级．它由这一事实给出，即在离管口距离为 l 时，边界层厚度和管半径 a 是同一量级，这时边界层几乎已经充满整个截面．在(39.12)中，令 $x\sim l$ 和 $\delta\sim a$，我们就得到

$$l\sim a^2 U/\nu\sim aR \tag{39.18}$$

因此，进口段的长度正比于雷诺数①．

问　　题

问题 1． 试确定驻点附近的边界层厚度(参看§10)．

解： 驻点附近流体的速度(边界层外)正比于离该点的距离 x，因此我们可以设 $U=cx$．估计方程(39.5)中各项量级的大小，我们得到 $\delta\sim\sqrt{\nu/c}$．所以，驻点附近边界层的厚度是有限值(而且，特别是在驻点本身处不为零)．

问题 2． 试确定两个不平行平板之间的收缩渠道边界层内的流动(波尔

---

① 我们将不讨论可压缩流体的边界层理论，当然，它要比不可压缩流体的情况复杂得多．这一理论的说明可以在下面著作中找到：Н. Е. Кочин, И. А. Кибель, Н. В. Розе, *Теоретическая гидромеханика*, ч. 2, Гла. II §35, 36, Москва 1948; H. Schlichting, *Boundary Layer Theory*, Pergamon Press, London 1955; L. Howarth ed. *Modern Developments in Fluid Dynamics: High Speed Flow*, Vol. 1, Oxford 1953(霍华斯主编，流体动力学的新发展：高速流，上册，徐华舫译，科学出版社，1958)．

豪森, 1921).

解: 现考虑沿其中一个平面的边界层, 并从 O 点开始计量坐标 x (参看 § 23, 图 8). 在理想流体情况下, 我们应当有速度 $U=Q/\alpha x\rho$; 按照伯努利方程, 相应的压力梯度为

$$\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx}=-\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}U^2\right)=\frac{Q}{\alpha^3x^3\rho^2}.$$

容易看出, v_x 和 v_y 必须通过下面的形式求取:

$$v_x=(Q/\rho\alpha x)f(y/x),\ v_y=(Q/\rho\alpha x)f_1(y/x).$$

由连续方程, 我们得到 $f_1=(y/x)f$, 于是, (39.5)的第一个方程就给出

$$\left(\frac{\rho\nu\alpha}{Q}\right)f''=1-f^2,$$

其中, 撇号表示 f 对其自变量 $\xi=y/x$ 微分. 边界条件是

$$f(0)=0,\quad f(\infty)=1$$

(因为我们必须有 $(v_x)_{y=0}=0$, $(v_x)_{y=\infty}=Q/\rho\alpha x$). 方程有一个初积分是

$$(\nu\alpha\rho/2Q)f'^2=f-\frac{1}{3}f^3+\text{常数}.$$

既然当 $y\to\infty$ 时, f 趋于 1, 我们就看出 f' 趋于确定的极限, 并且它只可能是零. 于是可以定出常数, 然后得到

$$(\nu\alpha\rho/2Q)f'^2=-\frac{1}{3}(f-1)^2(f+2).$$

由于右边当$0\leqslant f\leqslant 1$时总是负值, 我们必须有 $Q<0$. 也就是说, 所讨论的这个类型的边界层只有在收缩渠道的流动中 (并且只有在大雷诺数 $R=|Q|/\nu\rho$ 的情况下) 才能形成, 而不会在扩散渠道的流动中形成. 这和 § 23的结果是一致的. 再积分一次, 最后得

$$f=3\,\mathrm{th}^2[\ln(\sqrt{2}+\sqrt{3})+\xi\sqrt{R/2\alpha}]-2.$$

§ 40. 分离线附近的流动

在描述分离线时(§34), 我们已经说明, 分离线在物体表面上的实际位置是由边界层内的流动性质确定的. 下面我们将看到, 从数学的观点看, 分离线是这样一种线, 其上各点是边界层内(普朗特) 运动方程解的奇异点. 问题是要确定这些解在奇异线附近

的性质①.

我们已经知道，从分离线开始伸出一个曲面，延伸到流体内部，并划分出湍流区域. 在整个湍流区域内，流动是有旋的. 而当不发生分离时，流动只是在粘性起重要作用的边界层内有旋，主流中涡量为零. 因此，我们可以说，分离使得涡量从边界层一直“穿透”到流体内部. 然而，按照环量守恒定理，只有在表面附近(边界层内)的运动流体和主流流体直接混合时，才会发生这种“穿透”. 换句话说，边界层内的流动必须从物体的表面上分离，这时流线离开表面层并且进入流体内部. 所以，这种现象称做**分离**，或者**边界层分离.**

我们已经知道，边界层方程导致一个结果，即边界层内切向速度分量 v_x 远远大于垂直物面的速度分量 v_y. v_x 与 v_y 之间的这一关系是从涉及到边界层流动性质的基本假设中引出来的. 因而，只要普朗特方程存在有物理意义的解，这一关系就必须成立. 从数学上讲，这一关系对所有不处于紧挨奇异点的邻域中的点都成立. 但是，如果 $v_y \ll v_x$，就表明流体是沿着物体表面运动，其离开表面的运动是微不足道的，从而不可能出现分离. 所以我们得出结论：分离只能发生在普朗特方程的奇点所组成的线上.

同样，可以直接推断出这些奇异点的性质. 因为，当趋近分离线时，流动就偏离边界层而流入流体内部. 换句话说，与切向速度分量相比，法向速度分量此时已不再是个小量，而至少成为同一量级. 我们已知(见(39.8)式)，比值 v_y/v_x 是 $1/\sqrt{R}$ 的量级，因此，当某处 v_y 增大到 $v_y \sim v_x$ 时，就意味着 v_y 增大到 $\sqrt{R}$ 倍. 所以，对于雷诺数足够大的情况(当然，这正是我们所研究的情况)，可以设想 v_y 增加了无限大倍. 如果我们使用无量纲形式的普朗特方程，

① 这里，朗道处理此问题的方法，和通常的方法稍有不同.

刚才所说的情况在形式上就等价于，在分离线上的无量纲速度 v_y' 成为无限大值.

为了稍微简化以下的讨论. 我们将考虑无限长物体横向绕流的二维问题. 如通常那样，x 是沿表面上流动方向的坐标，而 y 则是从物体表面量起的距离. 现在，我们是要讨论分离点，而不是分离线，也就是分离线和 x y 平面的交点；在所取的坐标中，它就是点 $x=$常数$\equiv x_0$, $y=0$, 这里设 $x<x_0$为分离点以前的区域.

按照上面的结果，对所有的 y ①，我们有

$$v_y(x_0, y)=\infty. \tag{40.1}$$

但是，在边界层流动的研究中，通常总把普朗特方程中的 v_y 看成一个无关紧要的量(由于它很小). 因此，这里有必要考察一下函数 v_y 在分离线附近的性质.

根据方程(40.1)，显然当 $x=x_0$时，导数 $\partial v_y/\partial y$ 也变成无限大. 由连续方程

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}=0,$$

就有 $(\partial v_x/\partial x)_{x=x_0}$ 为无限大，或 $\partial x/\partial v_x=0$，这里是将 x 看作 v_x 和 y 的函数. 我们把 $v_x(x, y)$ 在 $x=x_0$ 处的函数值记作 $v_0(y)$，即

$$v_0(y)=v_x(x_0, y).$$

在分离点附近，差值 v_x-v_0 和 x_0-x 是小量，因此可以把 x_0-x 展成 v_x-v_0 的幂级数（对给定的 y）. 因为$(\partial x/\partial v_x)_{v_x=v_0}=0$，这个展开式的一阶项自然必定为零. 若取到二阶项，就有

$$x_0-x=f(y)(v_x-v_0)^2,$$

或者

$$v_x=v_0(y)+\alpha(y)\sqrt{x_0-x}, \tag{40.2}$$

---

① $y=0$ 除外，根据物体表面上的边界条件，那里总是 $v_y=0$.

其中，$\alpha=1/f$ 是单变量 y 的函数．现在写出

$$\frac{\partial v_y}{\partial y}=-\frac{\partial v_x}{\partial x}=\frac{\alpha(y)}{2\sqrt{x_0-x}}$$

并求积分，我们得到 v_y 为

$$v_y=\beta(y)/\sqrt{x_0-x}, \tag{40.3}$$

式中

$$\beta(y)=\frac{1}{2}\int\alpha(y)dy$$

是 y 的另一个函数

然后，我们用(39.5)的第一个方程

$$v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}=\nu\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}-\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx}. \tag{40.4}$$

从(40.2)看出，导数 $\partial^2 v_x/\partial y^2$ 在 $x=x_0$ 点不会变为无限大．dp/dx 同样如此，它由边界层外部的流动确定．但是，方程(40.4)的左边两项都变成无限大．所以在一阶近似中，对于分离点附近的区域，我们可以写出

$$v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}=0.$$

将 $\partial v_x/\partial x=-\partial v_y/\partial y$ 代入，这一等式可以改写成

$$v_x\frac{\partial v_y}{\partial y}-v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}=v_x^2\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{v_y}{v_x}\right)=0.$$

因为一般地说，v_x 在 $x=x_0$ 处不等于零，于是就有

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{v_y}{v_x}\right)=0,$$

即比值 v_y/v_x 和 y 无关．由(40.2)和(40.3)，我们在高阶项中得到

$$\frac{v_y}{v_x}=\frac{\beta(y)}{v_0(y)\sqrt{x_0-x}}.$$

如果它仅仅是 x 的函数，我们必须有

$$\beta(y)=\frac{1}{2}Av_0(y),$$

其中A是一个常数．因此

$$v_y=\frac{Av_0(y)}{2\sqrt{x_0-x}}\ .\tag{40.5}$$

最后，注意(40.2)和(40.3)中的α和β服从关系式$\alpha=2\beta'$，我们得到

$$\alpha=A\frac{dv_0}{dy},$$

从而有

$$v_x=v_0(y)+A\left(\frac{dv_0}{dy}\right)\sqrt{x_0-x}\tag{40.6}$$

在分离点附近，公式(40.5)和(40.6)确定了v_x和v_y对于x的函数式．我们看出，在该区域内每一函数可以展成$\sqrt{x_0-x}$的幂级数，v_y的展开式从-1次幂开始，所以当$x\to x_0$时，v_y按照$(x_0-x)^{-\frac{1}{2}}$的规律变为无限大．对于$x>x_0$，也就是分离点之后，展开式(40.5)和(40.6)没有物理意义，团为这时根式变成了虚数；这表明，普朗特方程只描述分离点以前的流动，因而把该方程的解延续到分离点以后是没有意义的．

根据物体表面的边界条件，当$y=0$时，必须恒有

$$v_x=v_y=0.$$

于是，从(40.5)和(40.6)可推断出

$$v_0(0)=0,\ (dv_0/dy)_{y=0}=0.\tag{40.7}$$

由此获得一个重要结果(由普朗特得出)：在分离点($x=x_0$，$y=0$)上，不仅是速度v_x为零，而且它对y的一阶导数也为零．

必须强调指出，只有当x取上述值，而v_y变成无限大时，才表示$\partial v_x/\partial y=0$是在分离线上成立的方程．如果(40.5)中的$A$恰好是零，则$v_y(x_0,y)\neq\infty$，此时导数$\partial v_x/\partial y$为零的点$x=x_0$，$y=0$就没

有什么特殊性，它并不是分离点．但是，A等于零毕竟只是偶然的，因此，这种情况是不大可能出现的．实际上，物体表面 $\partial v_x/\partial y=0$ 的点总是一个分离点．

如果在 $x=x_0$ 点上没有分离（即如果 $A=0$）的话，则当 $x>x_0$ 时，就会有 $(\partial v_x/\partial y)_{y=0}<0$，也就是，当已经离开表面但 y 值仍然很小时，v_x 会变成（绝对值增大的）负值．这就是说，$x=x_0$ 点以后，边界层下部的流体沿着与主流相反的方向运动；或者说，出现了流体的"逆流"．必须强调指出，按照这种推理，我们还不能肯定在 $\partial v_x/\partial y=0$ 的地方必然存在分离点；有"逆流"的整个流动图象有可能完全处于边界层内（如 $A=0$ 时的情形）而不进入主流；而分离的特征则在于这种逆流进入了主流．

前一节中已经证明，当雷诺数变化时，边界层内的流动图象保持相似，而且特别是 x 方向的尺度保持不变．由此可见，导数 $(\partial v_x/\partial y)_{y=0}=0$ 处的 x 坐标值 x_0 对所有的 R 为同一数值．因此，我们得出重要结论，物体表面上分离点的位置和雷诺数无关（当然，边界层仍要保持层流状态，见§45）．

让我们也来考察一下分离点附近压力分布 $p(x)$ 的性质．当 $y=0$ 时，方程(40.4)的左边随着 v_x 与 v_y 一起变为零，于是剩下

$$\nu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\right)_{y=0}=\left(\frac{1}{\rho}\right)\frac{dp}{dx} \tag{40.8}$$

由此表明，dp/dx 的符号和 $(\partial^2 v_x/\partial y^2)_{y=0}$ 的符号相同．当 $(\partial v_x/\partial y)_{y=0}>0$时，我们无法断定二阶导数的符号．但是，因为 v_x 是正的，并且随着离壁面的距离增加而增大（在分离点之前），在 $\partial v_x/\partial y=0$的那一点 $x=x_0$ 上，必定有$(\partial^2 v_x/\partial y^2)_{y=0}>0$．因此，我们断定

$$\left(\frac{dp}{dx}\right)_{x=x_0}>0, \tag{40.9}$$

即在分离点附近，流体从低压向高压运动．压力梯度和边界层外

速度 $U(x)$ 的梯度有如下关系:

$$\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx}=-U\frac{dU}{dx}.$$

因为 x 轴的正方向和主流方向相同, $U>0$, 所以有

$$\left(\frac{dU}{dx}\right)_{x=x_0}<0, \tag{4.10}$$

也就是说, 在分离点附近, 速度 U 沿流动方向是减小的.

由上面的结果可以推知, 在物体表面某个地方一定会发生分离. 因为在物体的前端和后端, 都存在一个理想流体势流速度为零的点(驻点), 于是, 从某个 x 值起, 速度 $U(x)$ 必定开始减小, 并且最终变为零. 但是很清楚, 沿物体表面运动的流体, 越是接近表面(即 y 越小), 受到的阻滞越强. 因此, 在边界层外缘速度 $U(x)$ 变为零之前, 紧贴表面处的流体速度一定先变为零. 从数学上讲, 这显然表示, 当 x 小于出现 $U(x)=0$ 的那一点 x 值时, 总会在某一点上导数 $\partial v_x/\partial y$ 变为零(因而一定会有分离).

在绕任意形状物体的流动中, 可以用完全类似的方法进行计算, 并且可导出, 物体表面两个切向速度分量 v_x 和 v_z 的导数 $\partial v_x/\partial y, \partial v_z/\partial y$ 在分离线上都为零(和以前一样, y 轴沿所考虑的那部分表面的法向).

我们可以作一个简单的推理, 说明在下述情况下必定需要有分离, 即假如在绕流物体上不发生分离的话, 压力便会沿着流动方向迅速增加(因而速度 U 迅速减小). 设通过一小段距离 $\Delta x=x_2-x_1$, 使压力 p 迅速地由 p_1 增加到 p_2 ($p_2\gg p_1$), 则通过同一段距离 Δx, 边界层外速度 U 从初始值 U_1 下降到一个相当小的值 U_2, 该值由伯努利方程

$$\frac{1}{2}(U_1^2-U_2^2)=\frac{p_2-p_1}{\rho}$$

确定. 因为 p 与 y 无关, 在离表面的所有距离上, 压力的增加

p_2-p_1 是相同的. 如果压力梯度 $dp/dx \sim (p_2-p_1)/\Delta x$ 充分大，包含粘性系数的项 $\nu\partial^2 v_x/\partial y^2$ 可以从方程 (40.4) 中略去不计（当然，还要设 y 不是很小）. 于是，我们可以用伯努利方程估计边界层内速度 v 的变化. 写出

$$\frac{1}{2}(v_2^2-v_1^2)=-\frac{p_2-p_1}{\rho},$$

或者由前面得到的方程，有

$$v_2^2=v_1^2-(U_1^2-U_2^2).$$

边界层内的速度 v_1 小于主流速度，于是，我们可以选一个 y 值，使 $v_1^2<U_1^2-U_2^2$. 这样，速度 v_2 就是一个虚数，表明普朗特方程不存在有物理意义的解. 事实上，在 Δx 距离内必须有分离，正是分离的结果使过分大的压力梯度减小了.

作为发生分离的一个有趣情形，我们研究由两个相交固体表面形成的拐角附近的绕流. 当有势层流绕拐角流动时（图 3），拐角顶边处的流体速度会变成无限大（见 §10, 问题6），与此同时，流向顶边的流速增大，而离开顶边的流速则减小. 实际上，一过了顶边，速度迅速下降（对应于压力的增大），这必将引起分离. 分离线就是拐角的顶边，其结果产生了 §35 中所研究的流动图象.

在拐角内的层流中（图 4），流体在顶边的速度为零. 在这种情况下，流向顶边的流速减小（压力增大）. 一般说来，其结果也要引起分离，分离线位于顶边的上游.

问　　题

设 Δp 是在 Δx 距离上能产生分离的压力增量，试确定其最小的可能值.

解：设 y 是从物体表面量起的某一距离，在该处：第一，可以应用伯努利方程；第二，边界层内速度的平方 $v^2(y)$ 小于边界层外速度平方的变化 $|\Delta U^2|$. 关于 $U(y)$，我们可以写出它的数量级：$v\approx ydv/dy\sim Uy/\delta$，其中 $\delta\sim\sqrt{\nu l/U}$ 是边界层厚度，l 是物体的线度. 使方程 (40.4) 右边两项量级相等，

即得

$$\frac{1}{\rho}\frac{\Delta p}{\Delta x}\sim\frac{\nu v(y)}{y^2}\sim\frac{\nu U^2}{\delta y}.$$

由条件

$$v^2=|\Delta U^2|=\frac{2}{\rho}\Delta p,$$

得

$$\frac{U^2y^2}{\delta^2}\sim\frac{\Delta p}{\rho}.$$

消去 y，我们最后得到

$$\Delta p\sim\rho U^2(\Delta x/l)^{\frac{2}{3}}.$$

§41. 层流边界层内流动的稳定性

边界层内的层流，与任何其它层流情况一样，在足够大的雷诺数下变得多少有些不稳定. 边界层中失稳的方式与管道内流动失稳的情形类似(§29).

边界层内流动的雷诺数沿着物体表面改变. 例如，在沿平板的流动中，我们可以定义雷诺数为 $R_x=Ux/\nu$，其中 x 是离平板前缘的距离，U 是边界层外的流体速度. 但是，对于边界层的情况，雷诺数更合适的定义是使它的特征长度参数直接用边界层厚度；例如，可用"位移厚度" δ^*(见§39 的第二个脚注). 因此我们有 $R_{\delta*}=U\delta^*/\nu$. 由于边界层厚度和距离 x 的依赖关系由公式(39.12)表示，显而易见有 $R_{\delta*}\sim\sqrt{R_x}$.①

因为边界层厚度随距离的变化是比较慢的，在研究一小段边界层流动的稳定性时，可以略去这种变化. 于是，我们可以考虑一种平面直线流动，其速度剖面沿 x 轴不改变②. 这样，从数学的观点看，问题完全类似于§29 中讨论过的两平板之间流动的稳定性

① 例如，在平板上的层流边界层中，$R_{\delta*}=1.72\sqrt{R_x}$.

② 当然，我们这样做，是忽略了表面曲率可能对边界层流动稳定性有影响这一问题.

问题，而差别仅仅在于速度剖面的形式：这里与两个边界面上$v=0$的对称剖面不一样，是一个非对称的剖面，其中速度从物体表面上的零值，变化到某个给定值U，即边界层外的流动速度．经过研究，得出了下面的结果（林家翘，1945；见林家翘，*The Theory of Hydrodynamic Stability*, Cambridge 1955）．

在ω, R平面上，稳定性极限曲线的形状（见§29）取决于边界层内速度剖面的形状．如果速度剖面没有拐点，而且速度v_x单调递增，速度曲线$v_x=v_x(y)$处处向上凸起（图20a），那么稳定区域

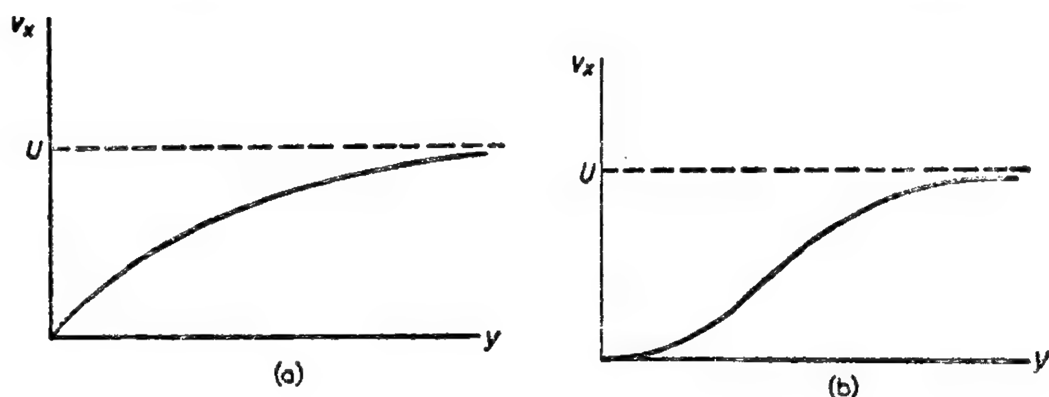
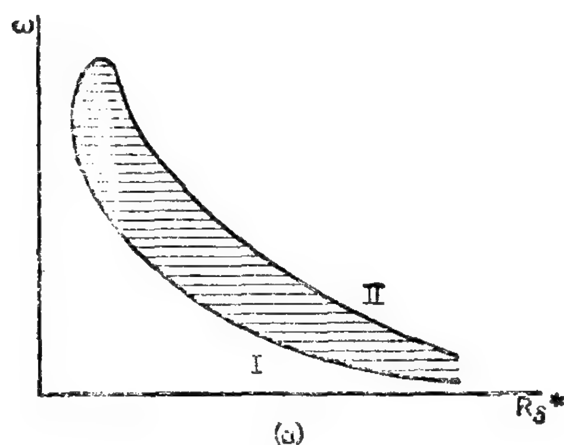


图 20

的边界形状将完全类似于在管流中得到的稳定性曲线．管流稳定性的特征为：存在一个极小值$R=R_{cr}$，在这一点上增强的扰动第一次出现，而当$R\to\infty$时，曲线的两条分枝渐近于横轴（图21a）．对于平板边界层内出现的速度剖面，计算求得的临界雷诺数为$R_{\delta^*cr}\approx 420$①．

如果边界层外流体速度向下游是减小的，则图20a表示的那种速度剖面就不可能产生．在这种情况下，速度剖面必须有一拐点．事实上，让我们考虑一小块壁面，它可以当作平面，设x仍然

① 当$R_{\delta^*}\to\infty$时，在极限曲线的两条分枝I和II上，ω分别以$R_{\delta^*}^{-\frac{1}{2}}$和$R_{\delta^*}^{-\frac{1}{5}}$的方式趋于零．



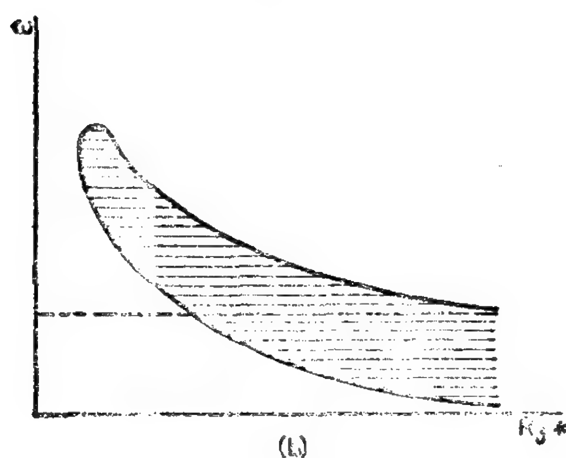


图 21

为流动方向的坐标，y 是离壁面的距离，从(40.8)式得到

$$\nu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\right)_{y=0}=\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx}=-U\frac{\partial U}{\partial x},$$

由此可见，如果U在下游是减小的($\partial U/\partial x<0$)，在表面附近必须有$\partial^2 v_x/\partial y^2>0$，也就是说，此处的曲线 $v_x=v_x(y)$是向上凹的．而当 y 增大时，速度 v_x 必须渐近地趋于有限的极限值U．因此，从几何上考虑，曲线显然必须变成向上凸的，从而一定有一个拐点(图 20b)．在这种情况下，用来确定稳定性区域的曲线形状稍有一点变化：当 $R\to\infty$时，两条分枝有不同的渐近线，一条趋于横轴，另一条趋于ω 的某个有限的非零值(图 21b)．拐点的出现也显著

地减小了临界雷诺数的值.

雷诺数沿着边界层不断增大这一事实，使得被带向下游的扰动有它本身的特色. 我们来考虑沿平板的流动，并假设在边界层内某点产生了某个给定频率 ω 的扰动. 它向下游的传播相当于在图 21a 中沿一条水平线 $\omega=$ 常数向右移动. 开始时，扰动是阻尼的；当到达稳定性曲线的分枝 I 后，它就开始增强. 这种情形一直延续到扰动抵达分枝 II 为止，此后扰动再次受到阻尼. 扰动在通过不稳定区域期间的总"放大系数"，随着该区域移向大 R 数(也就是，当分枝 I 和 II 之间相应的水平线段向下移动时)而迅速增大.

但是，这些结果并没有回答这样的问题：对于足够大的 R，边界层内是否产生真正的绝对不稳定性，即由于在给定点上的扰动随时间而增强所引起的不稳定（见 § 29）？与管流相同，迄今尚未做过这样的研究.

关于沿平板流动的实验结果表明，边界层内的湍流发生点[①]在相当程度上依赖于主流中扰动的强度. 对于显著的扰动，在 $R_{\delta*}\approx 560$时就观察到边界层变为湍流. 随着扰动强度的减小，湍流的起始点就推迟到较高的 $R_{\delta*}$ 值，它似乎趋于一个大约为 3000 的有限极限.

很可能，存在极限这一事实，表明了在足够高的 R 值下存在着真正的绝对不稳定性. 另一方面，也许是因为"放大系数"随着 R 增加而极其迅速地增大，以前描述过的"携带"型不稳定性可以导致真正的不稳定性.

---

① 因为雷诺数沿着平板变化，整个边界层不能同时变为湍流，而仅仅是 $R_{\delta*}$ 超过一定值的那一部分变成湍流. 对于给定的来流速度，这意味着湍流开始于离前缘的一定距离上；当速度增大时，这一距离趋于零.

§42. 对数型速度剖面

我们考虑沿无界平板的平面平行湍流；当然，“平面平行”一词是对(时间)平均流动而言的①．我们取流动方向为 x 轴，板平面为 xz 平面，这样，y 就是离平板表面的距离．平均速度的 y 分量和 z 分量都为零：$u_x=u, u_y=u_z=0$．不存在压力梯度，因而所有的量只依赖于 y．

用 σ 表示作用在单位面积表面上的摩擦力；这个力显然沿x方向．量 σ 就是单位时间内由流体传递给表面的动量；它是动量x分量的一个不变通量，指向 y 的负方向，代表离表面较远的流体层传递给较近的流体层的动量数值．

当然，这一动量通量的存在是由于沿 y 方向有一个平均速度 u 的梯度．如果流体在所有点上都以同样的速度运动，就不会有动量通量．也可以提出相反的问题：给定某个确定的 σ 值，试问，密度为 ρ 的流体必须有什么样的运动方能产生这么大的动量通量 σ？对于大雷诺数情况，粘性系数 ν 通常是不重要的；它只有对小距离 y 才变得重要起来(见下文)．因此，每一点的速度梯度du/dy，必须由常参数 ρ, σ，当然还有距离 y 本身来确定．这些量的量纲分别是克/厘米^3，克/厘米·秒^2 和厘米．导数 du/dy 的量纲是 1/秒．ρ，σ 和 y 具有这一合适量纲的组合只能是$\sqrt{\sigma/\rho y^2}$．因此，我们必定有

$$\frac{du}{dy}=\frac{1}{by}\sqrt{\frac{\sigma}{\rho}}, \tag{42.1}$$

其中 b 是一个常数；b 不能从理论上算出，而必须由实验确定，其结果是②

① §42—44 中的结果是由卡门和普朗特提出的．

② 这一常数值以及下面公式(42.8)中的常数值，是由测量管道湍流中管壁附近的速度分布得到的．

$$b = 0.417. \tag{42.2}$$

我们引入更方便的符号$v_* = \sqrt{\sigma/\rho}$,所以

$$\sigma = \rho v_*^2 \tag{42.3}$$

量 v_*具有厘米/秒的量纲，并且在所考虑的湍流中起着特征速度的作用；于是(42.1)变成

$$\frac{du}{dy} = \frac{v^*}{by},$$

从而

$$u = (v_*/b)(\ln y + c), \tag{42.4}$$

其中，c 是一个积分常数．我们不能应用原来表面上的边界条件去确定这一常数，因为当 $y=0$时，(42.4)的第一项变成无限大．其所以如此，原因是上面的表达式在离开表面非常小的距离内实际上是不适用的，因为那时粘性效应将变得很重要而不能忽略不计．也不存在无穷远处的边界条件，因为对于 $y=\infty$，表达式(42.4)再一次变成了无限大．而这是由于在我们所用的理想化条件下，表面是无界的，因此它的影响可延及于无限大的距离．

在确定常数 c 之前，首先可以指出所研究的流动具有下述重要性质：和通常碰到的情形不同，它没有可能给出作为湍流外尺度的不变特征长度参数．因此，要由距离 y 本身来确定这一尺度，即在离开表面距离为 y 处的湍流尺度是 y 量级的．湍流的脉动速度为 v_* 量级．这一事实也可从量纲分析中立即得出，因为如果从现有的变量 σ，ρ，y 去组合具有速度量纲的量，则 v_* 是可能构成的唯一的量．必须强调指出，当平均速度随着 y 一起减小的时候，脉动速度在离开表面的所有距离上保持同一数量级。这一结果是和脉动速度由平均速度的变化 Δu 来确定这个一般法则相一致的(§ 31)．在目前的情况下，不存在可以用来确定平均速度变化的特征长度；现在Δu 必须合理地规定为距离 y 发生显著变化时 u 的

改变．按照(42.4)式，这种由于 y 变化而引起的速度 u 的改变，正好是 v_* 量级．

在离表面足够小的距离处，流体的粘性开始变得重要起来．我们用 y_0 表示这些距离的量级，它可以确定如下．在这些距离上，湍流的尺度为 y_0 量级．速度为 v_* 量级．因此，表征 y_0 量级距离上流动的雷诺数是 $R\sim v_*y_0/\nu$．当 R 变成与 1 同量级时，粘性开始变得重要，于是我们求得

$$y_0\sim\frac{\nu}{v_*},\tag{42.5}$$

该式确定了 y_0．

在离表面的距离远小于 y_0 的地方，流动由普通的粘性摩擦确定．这里的速度分布可以直接从通常的粘性摩擦力公式

$$\sigma=\rho\nu\frac{du}{dy}$$

求得，由此

$$u=\frac{\sigma y}{\rho\nu}=\frac{v_*^2y}{\nu}.\tag{42.6}$$

这样，紧贴着壁面，存在一个平均速度随 y 线性变化的流体薄层；在整个这一层中速度很小，从壁面上的零变化到当 $y\sim y_0$ 时为 v_* 量级的值．我们称这一层为**粘性底层**．

必须强调指出，这里的流动是湍流．因此，从这一点来说，“层流底层”的习惯名称是不恰当的．它与层流的相似之处仅仅在于，它的平均速度分布遵循着在同样条件下层流真实速度分布的同一规律．当然，在粘性底层和流动的其它部分之间并没有明显的边界，所以，粘性底层的概念在一定程度上是定性的．

粘性底层中脉动速度的纵向分量 v'_x 和平均速度为同一数量级，而且特别是和 y 成正比($\sim v_*y/y_0$)．所以，由连续方程得出，$\partial v'_y/\partial y=-\partial v'_x/\partial x$ 正比于 y，从而脉动速度的横向分量 v'_y 按 y^2

的方式变化($\sim v_* y^2/y_0^2$). 其次,由于粘性底层内运动方程是线性的(非线性项远小于粘性项),因此,湍流脉动的周期在整个底层厚度内都是相同的. 以脉动速度乘以周期, 求得流体质点在它们的脉动运动中所通过的距离,其纵向距离在量级上正比于 y,而其横向距离则正比于 y^2 ($\sim y^2/y_0^2$).

此后我们将不再进一步关注粘性底层内的流动. 只是在决定方程(42.4) 中积分常数的适当选择时, 应当考虑到粘性底层的存在. 选择这一常数应使 y_0 量级距离上的速度成为 v_* 量级. 为了实现这一点,必须取 $c=-\ln y_0$,从而

$$u=\frac{v_*}{b}\ln\frac{y}{y_0},$$

或者

$$u=\frac{v^*}{b}\ln\left(\frac{yv_*}{\nu}\right). \tag{42.7}$$

这一公式 (在 y 的一定范围内) 确定了湍流沿表面流动的速度分布. 这种分布称为**对数型速度剖面**.

公式(42.7) 中对数的自变量应当包含一个数值系数, 但是在我们将要推导的公式中, 我们仅要求"对数的"准确度. 这意味着对数的自变量假定为很大的值, 因此我们略去的不仅是与自变量的低幂次项成正比的那些项, 而且也略去了对数项中那些比主要项幂次低的项. 在(42.7) 式的对数的自变量中引进一个小系数,等价于加上形式为常数$\times v_*$的一项,其中常数的数量级为1;这一项不含有对数,所以,我们可略去它. 但是,必须记住,在此处导得的公式中,对数的自变量并没有大到使它的对数也非常大的程度,所以,此公式的准确度不是很高的.

在这些公式的对数的自变量中,可以引进一个常系数,使它变得更准确, 或者让对数项加一个常数也是一回事. 但是, 这些常数不能从理论上计算出来,而应当由实验结果确定. 例如,一个更

准确的速度分布公式可以写成下列形式:

$$u=v_*[2.40\ln(yv_*/\nu)+5.84]. \tag{42.8}$$

要确定单位质量流体的能量耗散 ϵ 并不困难, σ 是动量通量密度张量

$$\Pi_{ik}=\rho v_i v_k-\eta(\partial v_i/\partial x_k+\partial v_k/\partial x_i)$$

中 Π_{xy} 分量的平均值. 在粘性底层之外, 粘性项可以略去, 所以 $\sigma=\rho\overline{v_x v_y}$. 引进脉动速度 $\mathbf{v}'$, 我们可以写出 $v_x=u+v'_x$; 速度 v_y 本身就是脉动速度 v'_y, 因为它的平均值为零. 结果得到

$$\sigma=\rho\overline{v_x v_y}=\rho\overline{v'_x v'_y}+\rho u\overline{v'_y}=\rho\overline{v'_x v'_y}.$$

其次, y 方向的能量通量密度是$\left(p+\frac{1}{2}\rho v^2\right)v_y$, 这里也略去了粘性项. 在第二项中令

$$v^2=(u+v'_x)^2+v'^2_y+v'^2_z,$$

并取平均, 我们得到

$$\overline{pv'_y}+\frac{1}{2}\rho(\overline{v'^2_x v'_y}+\overline{v'^3_y}+\overline{v'^2_z v'_y})+\rho u\overline{v'_x v'_y}.$$

这里只需保留最后一项, 理由是脉动速度是 v_* 量级. 因此, 在对数准确度内, 它和 u 相比是一小量. 压力 p 的湍流脉动值是 ρv_x^2 量级(见(31.4)式), 所以在同等准确度内, 可以略去能量通量中与其对应的项. 这样, 对于平均能量通量密度, 我们有

$$\rho u\overline{v'_x v'_y}=u\sigma.$$

当趋近表面时, 因为有能量耗散. 这一通量值减小, 当向表面趋近一个微元距离 dy 时, 能量通量减小了 $\sigma(du/dy)dy$, 而这就是在厚度为 dy 的单位面积流体层中, 能量转变为热的数额. 于是我们断定单位质量流体的能量耗散是$(\sigma/\rho)du/dy$, 或者有

$$\epsilon=\frac{v_*^3}{by}=\frac{(\sigma/\rho)^{\frac{3}{2}}}{by}. \tag{42.9}$$

§ 43. 圆管中的湍流流动

现在我们将上面的结果应用于圆管中的湍流流动. 在邻近管壁处(远小于半径 a 的距离上), 表面可以近似地看作平面, 于是速度分布必须由公式(42.7)或(42.8)给出. 因为函数 $\ln y$ 只是缓慢地变化, 如果在公式(42.7)中以 a 代替 y, 就可以在对数准确度的范围内, 给出管内流动的平均速度 U:

$$U=\frac{v_*}{b}\ln\left(\frac{av_*}{\nu}\right). \tag{43.1}$$

我们用 U 表示单位时间内通过某一管截面的流体体积除以管道的截面积, 即

$$U=\frac{Q}{\rho\pi a^2}.$$

为了建立速度 U 和用以维持流动的压力梯度 $\Delta p/l$ 之间的关系(Δp 为管子两端的压力差, l 是管长), 我们注意作用在管流横截面上的力是 $\pi a^2\Delta p$, 正是这个力克服壁面上的摩擦力. 既然壁面上单位面积的摩擦力是 $\sigma=\rho v_*^2$, 总摩擦力就是 $2\pi al\rho v_*^2$. 使这两个力相等, 我们有

$$\frac{\Delta p}{l}=\frac{2\pi v_*^2}{a}. \tag{43.2}$$

通过参数 v_*, 方程(43.1)和(43.2)确定了管流速度和压力梯度之间的关系. 这一关系称为管道的**阻力定律**. 将 v_* 按(43.2)式用 $\Delta p/l$ 表示, 然后代入(43.1)式, 就得到下面形式的阻力定律:

$$U=\sqrt{\frac{a\Delta p}{2b^2\rho l}}\ln\left(\frac{a}{\nu}\sqrt{\frac{a\Delta p}{2\rho l}}\right). \tag{43.3}$$

习惯上常在这个公式中引进一个所谓管道的**阻力系数**, 它定义为无量纲量

$$\lambda=\frac{2a\Delta p/l}{\frac{1}{2}\rho U^2}\tag{43.4}$$

λ 对无量纲雷诺数 $R=2aU/\nu$ 的依赖关系，由以下方程用隐函数的形式给出：

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}}=0.85\ln\left(\frac{R}{\sqrt{\lambda}}\right)-0.55.\tag{43.5}$$

这里，我们代入了(42.2)式中的 b 值，并在对数项以外加上了一个由经验确定的常数[①]。由这一公式确定的阻力系数是雷诺数的缓慢递减函数。为了比较，我们给出圆管内层流的阻力定律。在公式(17.10)中引入阻力系数，得到

$$\lambda=\frac{64}{R}.\tag{43.6}$$

在层流中，随着雷诺数的增大，其阻力系数比在湍流中减小得更快。

图 22 画出了 λ 对于 R 的函数关系的对数曲线图。陡的直线对应于层流[公式(43.6)]，较平缓的曲线(它也几乎是一条直线)对应于湍流。当雷诺数增大时，由第一条线向第二条线的过渡发生在流动变为湍流的点上；这种过渡可以在不同的雷诺数之下发生，取决于实际条件(扰动的强度，见 §29)。在过渡点上，阻力系数突然地增大。

到目前为止，我们都假设壁面是相当光滑的。如果壁面是粗糙的，上面得到的公式可以相应作一些改变。作为壁面粗糙性的一种量度，我们可以取凸起物线度的量级，记作 d。重要的是 d 和

① 这一公式中所选取的对数系数，对应于对数速度剖面公式(42.8)中的系数；只是在这种情况下，公式(43.5)才有理论意义，它可作为在足够大雷诺数时湍流的极限公式。如果出现在公式(43.5)中的两个常数值是任意选取的，它只能是一个关于 λ 对 R 依赖关系的纯经验公式。但是，在那种情况下，就没有理由认为它比其它适当表达了实验结果的较为简单的经验公式会更好一些。

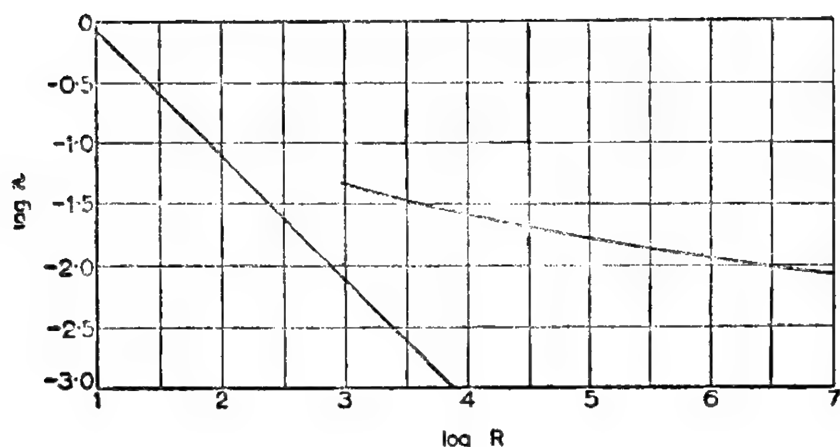


图 22[1]

底层厚度 y_0 的相对大小．如果 y_0 远大于 d，则粗糙性无关紧要；这就是所谓“曲面相当光滑”的含义．如果 y_0 和 d 是同一数量级，则不可能得到一般的公式．

在极端粗糙的相反极限情况下($d\gg y_0$)，又可以建立起一般关系式．这时显然谈不上什么粘性底层．湍流流动在表面凸起物周围发生，而这种流动由量 ρ, σ, d 表征；通常，粘性系数 ν 不可能直接出现．湍流流动的速度是 v_* 量级，它是仅有的一个具有速度量纲的量．可以看出，在沿粗糙面的流动中，速度在距离 $y\sim d$ 处变为小量($\sim v_*$)，而不像沿光滑面流动时是在 $y\sim y_0$ 处．显而易见，将 d 代换(42.7)中的 ν/v_*，便得速度分布的公式为

$$u=\frac{v_*}{b}\ln\left(\frac{y}{d}\right). \tag{43.7}$$

关于管道流动的相应公式必须作类似的变化，这只要用 d 代换式子里的 ν/v_* 就行了．代替(43.3)，我们得到阻力定律公式为

$$U=\sqrt{\frac{a\Delta p}{2b^2\rho l}}\ln\left(\frac{a}{d}\right). \tag{43.8}$$

现在，对数的自变量是一个常数，而不象(43.3)式那样含有压力梯度．我们看出，平均速度现在只是和管内压力梯度的平方根成正

(1) 此图似有问题，左边的直线应向右平移一格，用(43.6)式验算即可看出．——中译者注．

比．如果引入阻力系数，(43.8)变成

$$\lambda=\frac{8b^2}{\ln^2(a/d)}=\frac{1.4}{\ln^2(a/d)},\qquad(43.9)$$

也就是说，λ 是一个常数，而不依赖于雷诺数．

§44. 湍流边界层

我们曾经得到了对数速度分布，那个表达式在形式上对于平面平行湍流在整个空间都成立，这是由于我们所研究的流动乃是沿着无限大面积的表面．在沿有限物体表面的流动中，只有在离表面一个短矩离内(即边界层内)的运动具有对数型剖面①．我们也顺便指出，无论主流中的流体是作湍流运动还是层流运动，都可能存在湍流边界层．

在湍流和层流边界层中，平均速度的减小最终都是起因于流体的粘性．但是在湍流边界层中，粘性效应以一种稍不寻常的方式出现．湍流边界层内平均速度变化的方式本身不直接依赖于粘性系数；只有在粘性底层中，粘性系数才出现在速度梯度的表达式内．然而边界层的总厚度是由粘性确定的，并且当粘性系数为零时它变为零(见下面)．如果粘性系数真是零，就不会有什么边界层了．

如同在 §39 中对层流边界层所作的讨论一样，我们可把 §43 中的结果应用于沿薄平板流动形成的湍流边界层．在湍流层的边

① 根据下面就要确定的一个定律，沿物体表面的边界层厚度在流动方向上不断增大．对管道内的流动来说，这就解释了为什么对数剖面对整个管截面都成立．管壁上的边界层厚度从流体进入的那点就开始增长，在离开该点的某个有限距离上，边界层几乎充满了整个管截面．因此，如果我们假设管子足够长并略去入口段，整个管内的流动将和边界层内流动为同一类型．我们记得，管内的层流也有类似情况．这种流动在所有的雷诺数下都服从泊肃叶公式．在泊肃叶流动中，离壁面所有距离处，粘性都至关重要，其影响决不仅限于和它毗邻的一个薄层内．

界上，流体速度差不多等于主流速度，我们用U表示．而为了确定这个边界上的速度，在对数准确度上，我们可以应用公式(42.7)，并以边界层厚度δ代替y．使这两种表示式相等，就得到

$$U=\frac{v_*}{b}\ln\left(\frac{v_*\delta}{\nu}\right). \tag{44.1}$$

这里的U对给定的流动来说是个常参数；然而厚度δ则沿着平板变化，因而v_*也是一个随x变化的函数．为了确定这些函数，一个公式是不够的，我们还需要其它某个把v_*，δ和x关联起来的方程．

我们采用与推导湍流尾迹宽度公式(36.3)相同的推理去求得这个方程．跟那里一样，导数$d\delta/dx$必须具有边界层外缘上沿y轴和沿x轴速度之比的量级．后一个速度有U的量级，前一个速度起因于脉动速度，所以为v_*量级．于是有

$$\frac{d\delta}{dx}\sim\frac{v_*}{U},$$

由此得到

$$\delta\sim\frac{v_*x}{U}. \tag{44.2}$$

公式(44.1)和(44.2)一起，将v_*和δ确定为距离x的函数[①]．但是，这些函数不能写成显式．我们将用一个辅助量表示δ．因为v_*是随x缓慢变化的函数，由(44.2)看出，边界层厚度基本上是正比于x变化．我们可以回忆一下，层流边界层厚度是以$\sqrt{x}$的方式增大的，也就是说，层流边界层厚度要比湍流边界层厚度增长得慢些．

现在来确定作用在单位面积平板上的摩擦力σ对x的依赖关系．这种依赖关系可用下面两个式子给出：

---

① 如果在平板上的一个相当大范围内存在层流边界层，那么严格地说，x必须近似地计为从层流转变为湍流的那一点量起的距离．

$$\sigma=\rho v_*^2, U=\frac{v_*}{b}\ln\left(\frac{v_*^2 x}{U\nu}\right).$$

第二个式子是将(44.2)代入(44.1)中得到的，它只在对数准确度的意义上成立．我们引入一个(关于单位面积平板的)阻力系数c，定义为无量纲比值

$$c=\frac{2\sigma}{\rho U^2}=2\left(\frac{v_*}{U}\right)^2. \tag{44.3}$$

然后，从两个给定的方程中消去v_*，得到下面的方程：

$$\sqrt{\frac{2b^2}{c}}=\ln(cR_x), R_x=\frac{Ux}{\nu}, \tag{44.4}$$

它(在对数准确度上)以x的隐函数形式给出了c．为了提高这一公式的准确度，可以在对数项之外加一个经验常数，这样的公式就是

$$\frac{1}{\sqrt{c}}=1.7\ln(cR_x)+3.0. \tag{44.5}$$

由该式得出的阻力系数c是距离x的一个缓慢递减函数．

最后，我们用函数$c(x)$来表示边界层厚度．已知

$$v_*=\sqrt{\frac{\sigma}{\rho}}=U\sqrt{\frac{1}{2}c},$$

代入(44.2)式就求得

$$\delta=\text{常数}\times x\sqrt{c}. \tag{44.6}$$

当然，只有对于主流为层流的湍流边界层，这个公式才能用等号写出．此时，δ有确切的意义(湍流区域和层流区域总是明显地区分开的)．(44.6)式中的常数因子应当由实验结果确定．

问　　题

问题1. 试由公式(44.5)确定作用在平板两面上的合力．

解： 待求的平板每单位边长受力为

$$F=2\int_0^l \sigma dx,$$

其中 l 是板的长度. 引入阻力系数代替 F:

$$C=F/\frac{1}{2}\rho U^2\cdot 2l.$$

我们求得

$$C=\frac{1}{l}\int_0^l c dx.$$

如果仅取含最高次(一次)幂对数的项, 那么上面的积分就是 c 在 $x=l$ 处的值 $c(l)$. 为了得到更准确的 C 值, 对应于公式(44.5), 在计算积分时必须考虑次阶项, 它包含零次幂的对数. 为此, 我们写出

$$\int_0^l c dx=[xc]_0^l-\int_0^l x\frac{dc}{dx}dx.$$

把公式(44.5)写成

$$c=\frac{1}{A^2\ln^2 Bxc},$$

由此计算导数 dc/dx, 于是在所需的准确度上得出

$$C=c(l)+\frac{2}{A^2\ln^3 Blc}=c(l)\left[1+\frac{2}{\ln Blc}\right],$$

或

$$\frac{1}{\sqrt{C}}=\frac{1}{\sqrt{c}}\left(1-\frac{1}{\ln Blc}\right)=A(\ln Blc-1)$$

$$=A\ln(Blc/e)\approx A\ln(BlC/e).$$

把公式(44.5)中的 A 和 B 值代入, 我们得到下列公式:

$$\frac{1}{\sqrt{C}}=1.7\ln(CR)+1.3,$$

它表示总阻力系数 C 对于雷诺数 $R=Ul/\nu$ 的函数关系. 对于大雷诺数, 由此公式给出的阻力系数(随着 R 的增加)以 $1/\ln^2 R$ 的方式减小. 对于层流边界层的情况, C 以 $1/\sqrt{R}$ 的方式减小[见(39.16)], 就是说, 要减小得更快些. 这样, 我们可以断定, 在大雷诺数的情况下, 湍流边界层的摩擦力大于层流边界层的摩擦力.

问题 2. 在湍流边界层情况下, 试将粗糙平板的阻力系数确定为雷诺数的函数.

解: 以粗糙面的凸起尺度 d 代替粘性底层的厚度 $y_0(\sim\nu/v_*)$, 我们从(44.1)和(44.2)得到

$$U=\frac{v_*}{b}\ln\left(\frac{xv_*}{Ud}\right).$$

引进阻力系数 c，于是就有

$$\frac{0.59}{\sqrt{c}}=\ln\left(\frac{x\sqrt{c}}{d}\right).$$

类似地，平板的总阻力系数为

$$\frac{0.59}{\sqrt{C}}=\ln\left(\frac{l\sqrt{C}}{d}\right)$$

（也是在对数准确度上）．可以指出：粗糙平板的阻力系数和雷诺数无关．

§45. 失阻

由前面几节得到的结果，我们可以引出关于大雷诺数下阻力定律（即当雷诺数很大时，作用在物体上的阻力和 R 值之间的关系）的重要结论．

关于大 R 数下的流动图象（这里只讨论这种情况），我们已经作过叙述，就是：在流体的整个主流部分（即除去边界层的所有地方，这里不考虑边界层），流体可以认为是理想的，除去湍流尾迹以外处处是势流．尾迹的宽度取决于物体表面上分离线的位置．必须注意的是，虽然这一位置由边界层的性质所决定，但我们在 §40 中已经知道，原来它与雷诺数无关．于是我们可以说，对于大雷诺数，整个流动图象几乎与粘性即 R 数无关（只要边界层保持层流状态，见后）．

因此，阻力从而也必须和粘性系数无关．我们所掌握的就仅剩以下三个量：主流速度 U，流体密度 ρ 和物体尺度 l．由这些量我们只能构成一个具有力的量纲的量，就是 ρU^2l^2．习惯上，我们不用物体线度的平方 l^2，而是引入一个和它成正比的量——和流动方向垂直的横截面积 S．设

$$F=\text{常数}\times\rho U^2S,\tag{45.1}$$

其中的常数是一个只决定于物体形状的数字．这样，（大雷诺数下

的)阻力必须正比于物体的横截面积和主流速度的平方. 为了比较,我们可以回忆一下,极小雷诺数($R\ll1$)下的阻力是正比于物体的线度和速度本身($F\sim\nu\rho lU$; 见 § 20)①.

我们已经说过, 习惯上引入阻力系数C来代替阻力F, 它定义为

$$C=\frac{F}{\frac{1}{2}\rho U^2S}.$$

这是一个无量纲量,因而只能依赖于R. 公式(45.1)变成

$$C=\text{常数}. \tag{45.2}$$

就是说,阻力系数只决定于物体的形状.

上面所说的这种情形并不能延伸到任意大的雷诺数. 理由是,当R足够大时,层流边界层(位于分离线前面的物体表面上)变得不稳定, 接着就变成湍流. 但是, 并不是整个边界层都变成湍流,而仅仅是其中一部分如此. 所以,物体的表面可以分成三个部分: 在前面有层流边界层,接着是湍流边界层, 最后是分离线后方的区域.

边界层内湍流的发生对整个主流的流动图象有很大的影响. 它使得分离线大大地移向物体的后部(即向下游移动), 以致物体后面的湍流尾迹缩小了(如图 23 所示,图中的阴影为尾迹区域)②.

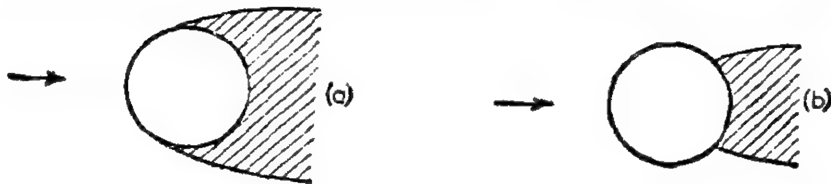


图 23

① 绕气泡的流动是一种特殊情况, 这里即使在大R数下, 阻力仍和U成正比; 见本节后面的问题.

② 例如,在长圆柱的横向绕流中,边界层内湍流的发生使分离点由 95° 移至60° (这里圆柱上的方位角是从流动方向量起的).

湍流尾迹的缩小引起阻力的减小．因此，大雷诺数下边界层内湍流的发生伴随着阻力系数的减小，在 10^5 附近一个较狭窄的雷诺数范围内，阻力系数下降一个相当大的比数．我们把这种现象称为**失阻**．在这个雷诺数范围内，阻力系数减小得很多，以致在 C 为常数情况下本来和速度平方成正比的阻力本身，现在都随着速度的增加而减小．

可以指出，主流中的湍流度对失阻现象有一定的影响；来流的湍流度越大，边界层越早变成湍流(即变成湍流的 R 数越小)，因此，阻力系数在较小的雷诺数下就开始减小，并且延及一个较宽的 R 数范围．

图 24 和图 25 给出了球的阻力系数对于雷诺数 $R=Ud/\nu$ 的实验函数曲线；图 24 是以对数标尺绘制的．对于很小的 $R(\ll 1)$，阻力系数按 $C=24/R$(斯托克斯公式)减小，以后就越来越慢地继续减小，一直到 $R\approx 5\times 10^3$，在这里 C 达到极小值．超过该点后，

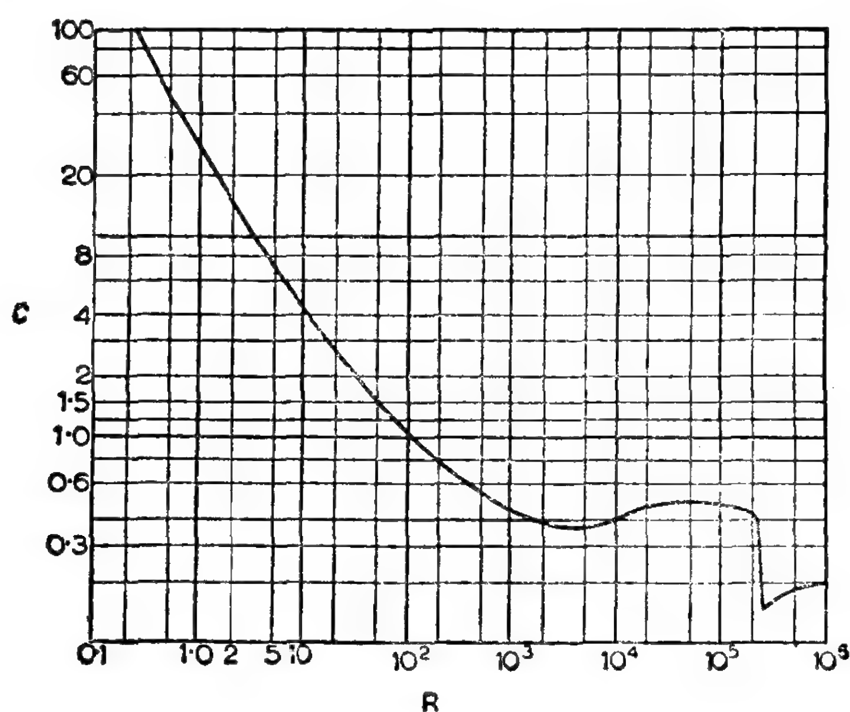


图 24

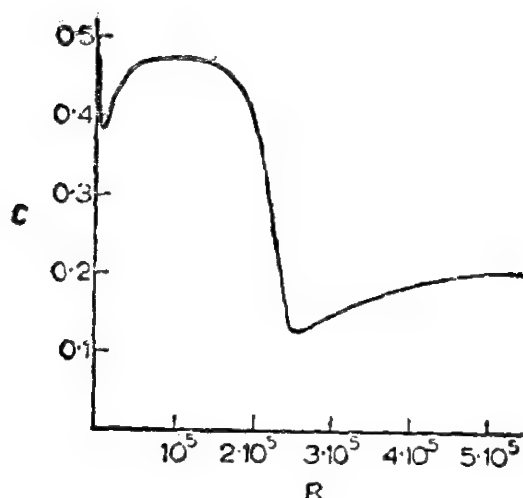


图 25

它稍有上升. 在雷诺数为 2×10^4 到 2×10^5 范围内, (45.2)式所表示的规律成立, 即 C 大体上为一常数. 失阻出现在 2×10^5 和 3×10^5 之间的 R 值范围内, 阻力系数减小到原先的1/4 到 1/5.

作为比较, 我们可以给出一个不存在临界雷诺数的流动的例子. 考察沿平面圆盘的垂直方向绕平盘的流动. 在这种情况下, 从纯几何来考虑, 分离位置是明显的: 分离显然要发生在盘的边缘, 并且不会从那里移至别处. 因此, 当 R 增大时, 盘的阻力系数保持不变, 也就不会有什么失阻.

必须记住, 当失阻发生在高速情况下时, 流体的压缩性可以有不容忽视的影响. 标志这种影响程度的参数就是**马赫数** $M=U/c$, 其中 c 是声速; 如果 $M\ll1$, 流体可以作为不可压缩流体(§10). 既然在两个参数 M 和 R 中, 只有一个参数含有物体的线度, 那么这两个参数就可以独立地变化.

实验结果表明, 一般说来, 压缩性对层流边界层内的流动有一个稳定效应. 当 M 增大时, R 的临界值增大. 例如, 拿一个球来说, 当 M 从 0.3 变到 0.7 时, 失阻从 $R\approx4\times10^5$ 推迟到 $R\doteq8\times10^5$.

我们还可以指出, 当 M 增大时, 层流边界层分离点的位置向上

游(即物体的前部)移动，而这必然要引起阻力有某些增大.

问　　题

试求大雷诺数情况下作用于液体中运动气泡上的阻力(列维奇, 1949).

解: 在液体和气体之间的界面上，流体的切向速度不为零，但它的法向导数为零(我们略去气体的粘性). 因此，边界附近的速度梯度将不会很高，也就不会有 § 39 意义上的边界层；所以，在整个气泡的表面上将不存在分离. 如用体积分(16.3)计算能量耗散，在略去了液体的表面层和很窄的湍流尾迹之后，我们就可以在整个空间内应用绕球势流的速度分布(见 § 10, 问题 2). 利用 § 16 问题中得到的公式，可求得

$$\dot{E}_{动}=-\eta\int\left(\frac{\partial v^2}{\partial r}\right)_{r=R}2\pi R^2\sin\theta d\theta=-12\pi\eta RU^2.$$

因此，我们看出所求的耗散阻力为[①]

$$F=12\pi\eta RU.$$

§ 46. 绕流线型物体的流动

可以提出这样的问题：为了使物体在流体中运动所形成的阻力尽可能小，物体(比如说，横截面积是给定的)应当有什么样的形状？由上面的讨论很清楚，要做到这一点，分离必须尽可能远地向后移：分离发生在物体后端附近，湍流尾迹就会狭窄到最低限度. 我们已经知道，只要物面压力顺下游方向迅速增大，便会促使分离的发生. 因此，物体必须具有这样的形状，以致在物面压力增大的地方，可使压力变化尽可能地缓慢和平滑. 这是可以做到的，只要物体的形状沿着流动方向变得细长，并在下游光滑地收缩到一个尖点；这样，沿物体两侧的流动就会光滑地汇合，而不需要绕过任何棱角，也不需要从主流方向偏转一个相当大的角度. 物体的前

① 这个公式的应用范围实际上是不大的，因为当速度增到足够大时，气泡就不再保持球状了.

端必须是圆弧形的，因为如果那里有一个折角的话，流体速度在顶点就会变成无限大(见 § 10 问题 6)，从而压力沿下游方向会迅速增大，这就不可避免地要导致分离.

图 26 中所画的那种形状接近于满足所有这些要求. 图 26b 表示的剖面可以是，例如细长旋成体的截面，或者长"翼展"物体的截面(我们习惯上称这样一种物体为**机翼**). 机翼的横截剖面可以如图 26a 那样为非对称的. 在绕这种形状物体的流动中，分离只在靠近尖后缘的地方发生，因而阻力系数是比较小的. 这种物体称为**流线型**物体.

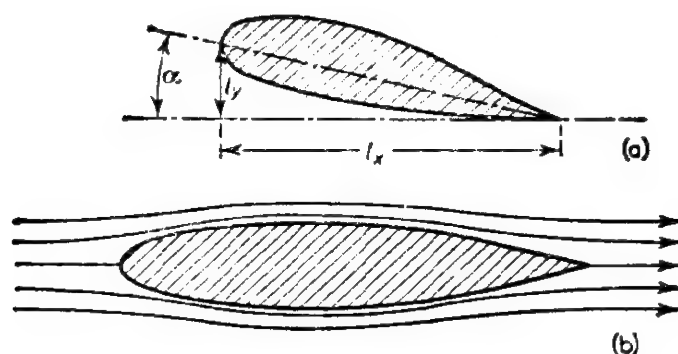


图 26

在流线型物体的阻力中，由边界层内流体作用于表面的直接摩擦力是重要的部分. 对非流线型物体(前一节中讨论过这种情况)来说，摩擦力的作用相对地比较小，因此实际上无足轻重. 但在平行于平板的流动这种截然相反的情况下，这种作用却成了阻力的唯一来源(§ 39).

在流线型翼相对于主流倾斜一个小角度 α(称为**攻角**，图 26)的绕流中，将产生一个大的升力 F_y，而阻力 F_x 仍然较小，因而比值 F_y/F_x 可以达到很大的值(~10—100). 但是，只有当攻角较小($\lesssim 10°$)时，才能保持这种特点. 在较大的攻角下，阻力上升很快，并且升力下降. 这种现象可以这样来解释: 在大攻角下，物体已不再是流线型的；分离点朝物体前部移动了一个相当大的距离，从而

尾迹变得比较宽了．必须记住，平板，作为很薄物体的极限情况，只是在非常小的攻角下才是流线型的；甚至当它和主流只倾斜一个小角度时，在平板的前缘也要发生分离．

按照定义，攻角α是从零升力时的翼面位置量起的．在小攻角情况下，我们可以将升力展开为α的幂级数．如果只取第一项，我们就可以假设力F_y和α成正比．其次，根据类似于对阻力进行过的量纲分析，升力必须正比于ρU^2．再引进翼展l_z，我们可以写出

$$F_y=\text{常数}\times\rho U^2\alpha l_x l_z, \tag{46.1}$$

其中的常数仅取决于机翼的形状，特别是，它和攻角无关．对于很长的机翼，可以假设升力正比于翼展，在这种情况下，常数只决定于翼剖面的形状．

通常使用**升力系数**，而不用机翼升力；升力系数定义为

$$C_y=\frac{F_y}{\frac{1}{2}\rho U^2 l_x l_z}. \tag{46.2}$$

如上所述，对于很长的机翼，升力系数正比于攻角，它既不依赖于速度，也不依赖于翼展：

$$C_y=\text{常数}\times\alpha. \tag{46.3}$$

在应用儒可夫斯基公式计算流线型机翼的升力时，必须确定速度环量Γ，做法如下：已经知道尾迹以外的流动是处处有势的，现在的情况是，尾迹很薄，并且在机翼表面上它只占据后缘尖点附近的一个很小区域．因此，为了确定速度分布(并由此确定环量Γ)，我们可以求解理想流体绕机翼的势流问题．尾迹的存在被设想为有一个切向间断面，它从机翼的尖锐后缘伸向流体内部，那里的速度势存在一个间断$\phi_2-\phi_1=\Gamma$．在§37中已经证明，导数$\partial\phi/\partial z$在这个面上也存在间断，但导数$\partial\phi/\partial x$和$\partial\phi/\partial y$是连续的．对有限翼展机翼，这种形式的问题有唯一解，但是，寻求精确

解则是非常复杂的. 对于小攻角倾置的圆盘形机翼, 这一问题已由 H.E. 柯钦解出①.

若机翼很长(并且具有同样的截面), 可将它看作在 z 方向上是无限的, 那么, 我们就可以把流动当作(xy 平面内的)二维流. 显然, 由对称性, 速度 $v_z=\partial\phi/\partial z$ 沿机翼必须为零. 因此, 在这种情况下, 我们必须找一个只有速度势存在间断, 而其导数连续的解. 换句话说, 此时不存在任何切向间断面, 而只有一个多值函数 $\varphi(x, y)$, 当环绕翼剖面一周时, 它得到一个有限大的增量 Γ. 但是, 在这种情形下, 二维流问题没有唯一解, 因为它可以有带任何速度势间断值的解. 为了得到唯一的结果, 还必须满足另外的条件, 这一条件是由 C.A. 恰布雷金在 1909 年第一次提出来的.

这个条件称为**儒可夫斯基-恰布雷金条件**, 它要求流体的速度在机翼的尖锐后缘不变为无限大. 关于这一点, 我们可以回忆一下, 当理想流体绕流一个拐角时, 按照幂次律, 角顶边处的流体速度一般是要变为无限大的(§10, 问题 6). 这就说明, 上述条件意味着, 由机翼两边流来的气流必须光滑地汇合, 而不会绕过拐角. 当这个条件得到满足时, 势流问题的解当然就提供一个非常类似于真实情况的流动图象; 在真实情况下, 速度处处为有限值, 而分离只能在后缘处发生. 于是, 解变成了唯一的, 特别是, 计算升力所需的环量 Γ 有了确定的值.

§47. 诱导阻力

流线型(有限翼展)机翼阻力中, 有一个重要部分是由薄湍流尾迹中能量耗散导致的阻力所构成的. 这种阻力称为**诱导阻力**.

§21 中曾经证明, 我们如何通过研究远离物体的流动, 可以

---

① *Н.Е.Кочин, Прикл. Матем. И Мех.* (应用数学与力学)4,3,1940; 9,3,1945.

算出尾迹引起的阻力. 但是, 公式(21.1)并不适用于目前这种情况. 按照那个公式, 阻力是由对整个尾迹截面取 v_x 的积分而给出的, 也就是, 由通过尾迹的流量给出的. 然而, 估计一下流线型机翼后面尾迹的厚度, 即知在目前情况下流量很小, 因此, 在下面所用的近似中可以略去不计.

如同 § 21 中那样, 我们将力 F_x 写为通过平面 $x=x_1$ 和平面 $x=x_2$ 的动量的 x 分量的两个总通量之差, 这两个平面分别位于物体的远后方和远前方. 将速度分量记作 $U+v_x, v_y, v_z$, 就得到动量通量密度分量 Π_{xx} 的表达式

$$\Pi_{xx}=p+\rho(U+v_x)^2,$$

于是阻力为

$$F_x=\left(\iint\limits_{x=x_2}-\iint\limits_{x=x_1}\right)[p+\rho(U+v_x)^2]\,dy\,dz. \qquad (47.1)$$

考虑到尾迹厚度很小, 在沿平面 $x=x_1$ 的积分中, 可以略去沿尾迹截面的积分, 所以积分域可只取尾迹外部的区域. 但是, 这一区域中是势流, 伯努利方程成立:

$$p+\frac{1}{2}(\boldsymbol{U}+\boldsymbol{v})^2=p_0+\frac{1}{2}\rho U^2,$$

因此

$$p=p_0-\rho Uv_x-\frac{1}{2}\rho(v_x^2+v_y^2+v_z^2). \qquad (47.2)$$

这里, 我们不能像 § 21 中那样略去二次项, 因为在现在所考虑的情况下, 正是这些项确定了所要求的阻力. 将(47.2)代入(47.1), 即得

$$F_x=\left(\iint\limits_{x=x_2}-\iint\limits_{x=x_1}\right)\Big[p_0+\rho U^2+\rho Uv_x+\frac{1}{2}\rho(v_x^2-$$
$$-v_y^2-v_z^2)\Big]\,dy\,dz.$$

常数 $p_0+\rho U^2$ 积分之差是零, ρUv_x 积分之差也是零, 这是因为通

过前后两个平面的质量通量

$$\iint \rho v_x dy dz$$

一定是相同的(在这里所考虑的近似程度上,可以略去通过尾迹的流量). 其次, 我们若把平面 $x=x_2$ 取到物体前面充分远的地方,该平面上的 v 将是非常小的,因而$\frac{1}{2}\rho(v_x^2-v_y^2-v_z^2)$沿此平面的积分可以略去不计. 最后,在绕流线型机翼的流动中,尾迹外的速度 v_x 如与 v_y 和 v_z 相比的话,是一个小量. 因此, 在沿 $x=x_1$ 平面的积分中,v_x^2 与 $v_y^2+v_z^2$ 相比,也可以略去不计. 于是得到

$$F_x=\frac{1}{2}\iint(v_y^2+v_z^2)dy dz, \tag{47.3}$$

这里, 积分是在物体后方较远距离的一个平面上($x=$常数)计算的,而尾迹的横截面被排除在积分域之外①.

用这种方法算得的流线型机翼的阻力, 可以用速度环量Γ表示,该环量也确定了升力. 为此,我们首先指出,在离物体充分远的距离上,速度随坐标 x 的变化是微不足道的,所以,可以把 $v_y(y,z)$ 和 $v_z(y,z)$ 看作与 x 无关的二维流速度. 若用流函数(见 § 10)作为辅助量将更为方便, 这时 $v_z=\partial\psi/\partial y$, $v_y=-\partial\psi/\partial z$. 于是有

$$F_x=\frac{1}{2}\rho\iint\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2\right]dy dz,$$

其中,沿铅垂坐标 y 的积分是从 $+\infty$积到 y_1, 又从 y_2 积到 $-\infty$, 这里的 y_1 和 y_2 是尾迹上下边界的坐标(见 § 37 的图 18). 因为尾迹以外为势流($\nabla\times\boldsymbol{v}=0$), 有

① 为避免误解,应当作如下说明. 公式(47.3)可能给人这样的印象: 当 x 增大时,v_y, v_z 在量级上没有减小. 的确,只要还如我们在推导公式(47.3)时所假设的那样,尾迹厚度与其宽度相比为一小量,上述想法就是正确的. 但在机翼后方非常大的距离上,尾迹最终变厚了,以致近似于变成一个圆形截面. 在那里, 公式(47.3)便不对了,此时,v_y, v_z 随 x 增大而迅速减小.

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}=0.$$

利用二维格林公式，就得到

$$F_x=-\frac{1}{2}\rho\oint\psi\left(\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)dl,$$

这里的积分周线为原面积分的积分域边界线，而 $\partial/\partial n$ 表示沿周线外法向的导数. 在无穷远处，$\psi=0$，所以积分就环绕尾迹在 yz 平面上的截面周线计算，可得

$$F_x=\frac{1}{2}\rho\int\psi\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)_2-\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)_1\right]dz.$$

此处是在整个尾迹宽度上积分，方括号中的差值表示导数 $\partial\psi/\partial y$ 通过尾迹的间断值. 因为 $\partial\psi/\partial y=v_z=\partial\phi/\partial z$，我们有

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)_2-\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)_1=\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)_2-\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)_1=\frac{d\Gamma}{dz},$$

因此，

$$F_x=\frac{1}{2}\rho\int\psi\left(\frac{d\Gamma}{dz}\right)dz.$$

最后，我们利用势论中的一个公式:

$$\psi=-\frac{1}{2\pi}\int\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)_2-\left(\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)_1\right]\ln r\,dl,$$

这里积分是沿着一条平面周线，r 则是从 dl 到需求出 ψ 的那一点的距离，而方括号中的表达式就是 ψ 的导数沿周线法向的间断值①. 在现在的情况下，积分曲线是 z 轴的一段，所以我们可以将 z 轴上的 $\psi(y,z)$ 函数值写为

$$\psi(0,z)=\frac{1}{2\pi}\int\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)_1-\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)_2\right]\ln|z-z'|\,dz'$$

---

① 在二维势论中，这一公式给出了电荷密度为

$$\frac{1}{2\pi}\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)_2-\left(\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)_1\right]$$

的带电平面周线所产生的电势.

$$=-\frac{1}{2\pi}\int\frac{d\Gamma(z')}{dz'}\ln|z-z'|dz'.$$

最后将这个式子代入 F_x,就得到诱导阻力的下列公式:

$$F_x=-\frac{\rho}{4\pi}\int_0^l\int_0^l\frac{d\Gamma(z)}{dz}\cdot\frac{d\Gamma(z')}{dz'}\ln|z-z'|dzdz' \tag{47.4}$$

(L.普朗特,1918). 这里已将翼展记作 $l_z=l$, 并将 z 的原点取在机翼的一端.

如果所有 z 方向的线度增加某个倍数(Γ 保持不变), 积分(47.4)将保持不变①. 这表明, 当翼展增大时,作用在机翼上的总诱导阻力保持为同一个数量级. 换句话说, 机翼单位长度上的诱导阻力随长度增大而减小②. 和阻力不同,总升力

$$F_y=-\rho U\int\Gamma dz \tag{47.5}$$

几乎随翼展线性地增大,而单位长度的升力不变.

下面介绍的方法便于对积分(47.4)和(47.5)进行实际计算. 我们引入一个新变量 θ 替代坐标 z,定义为

$$z=\frac{l}{2}(1-\cos\theta)\qquad(0\leqslant\theta\leqslant\pi). \tag{47.6}$$

速度环量分布可写成傅里叶级数:

---

① 为避免误解,应该指出: 当长度单位变化时, 被积函数中的对数将增加一个常数,但这是无关紧要的.事实上,这个积分与(47.4)的差别仅在于 $\ln|z-z'|$ 被一个常数所替代,因而这个积分等于零,这是由于

$$\int\frac{d\Gamma}{dz}dz=\Gamma,$$

而 Γ 在尾迹的边缘处为零,所以定积分是零.

② 在无限翼展的极限情况下,单位长度机翼的诱导阻力为零. 实际上还保留少量的阻力,它是由通过尾迹的流量(即积分 $\iint v_x dydz$)确定的, 而在公式(47.3)的推导中被略去了.这个阻力包括摩擦阻力以及其余一部分起因于尾迹耗散的阻力.

$$\Gamma = -2Ul\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\theta. \tag{47.7}$$

因此，在翼端($z=0$ 和 l，或 $\theta=0$ 和 π)，$\Gamma=0$ 的条件是满足了的.

将表达式(47.7)代入(47.5)并计算积分(利用当 $n\neq1$ 时，函数 $\sin\theta$ 和 $\sin n\theta$ 的正交性)，我们得到

$$F_y=\frac{1}{2}\rho U^2\pi l^2A_1 .$$

所以，升力仅依赖于表达式(47.7)中的第一个系数. (46.2)中的升力系数为

$$C_y=\pi\lambda A_1, \tag{47.8}$$

这里，我们引入了机翼的展弦比 $\lambda=l/l_x$.

为计算阻力，我们将公式(47.4)分部积分一次，改写成

$$F_x=\frac{\rho}{4\pi}\int_0^l\int_0^l\Gamma(z)\frac{d\Gamma(z')}{dz'}\frac{dzdz'}{z-z'}. \tag{47.9}$$

不难看出，对 z' 的积分必须取主值. 将(47.7)式代入，经过初等的运算①，导得下面的诱导阻力系数公式:

$$C_x=\pi\lambda\sum_{n=1}^{\infty}nA_n^2. \tag{47.10}$$

机翼阻力系数定义为

$$C_x=\frac{F_x}{\frac{1}{2}\rho U^2l_xl_z},$$

和升力系数相似，这里指的是 xz 平面单位面积上的阻力.

---

① 在对 z' 积分时，要用到积分:

$$P\int_0^{\pi}\frac{\cos n\theta'}{\cos\theta'-\cos\theta}d\theta'=\frac{\pi\sin n\theta}{\sin\theta}.$$

在对 z 积分时，则要利用

$$\int_0^{\pi}\sin n\theta\sin m\theta d\theta=\begin{cases}\pi/2 & (m=n)\\ 0 & (m\neq n).\end{cases}$$

问　　题

当给定升力和翼展 $l_z=l$ 时，试求诱导阻力的最小值.

解： 由公式(47.8)和(47.10)清楚看出，如果所有的 A_n(但 $n\neq1$) 等于零，则对给定的 C_y(即给定的 A_1)，便得到 C_x 的最小值. 因此

$$C_{x,\,\min}=C_y^2/\pi\lambda. \tag{1}$$

速度环量沿翼展的分布由下面的公式给出：

$$\Gamma=-\frac{4}{\pi l}Ul_xC_y\sqrt{z(l-z)}. \tag{2}$$

如果翼展充分长，则绕该机翼任何截面的流动可近似为绕无限长且截面处处与其相同的机翼的流动. 在这种情况下，我们可以说，当机翼在 xz 平面内的形状是一个半轴为 $\frac{1}{2}l_x$ 和 $\frac{1}{2}l$ 的椭圆时，就得到环量分布(2).

§48. 薄翼的升力

按照儒可夫斯基定理，计算作用在机翼上的升力的问题，归结为求速度环量 Γ. 对于截面处处相同的无限翼展流线型薄翼，可以给出该问题的一般解①. 下面介绍的巧妙解法是由 M. B凯尔迪许和Л. И. 谢道夫提出来的(1939).

令 $y=\zeta_1(x)$ 和 $y=\zeta_2(x)$ 是翼剖面下半部分和上半部分曲线的方程式(见图 27). 假设这个翼剖面很薄，稍许弯曲，并且相对

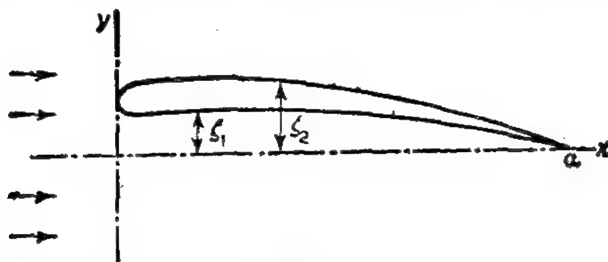


图　27

① 下面两部著作中，有关于二维机翼不可压缩绕流理论的较详细说明： Н. Е. Кочин, И. А. Кибель, Н. В. Розе. *Теоретическая гидромеханика*. ч. 1, Москва 1948 (柯钦，基别里，罗兹著. 理论流体力学，曹俊友等译，高等教育出版社，1956)；Л. И. Седов, *Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики*, Москва, 1950.

主流(x 轴)倾斜一个小攻角;即 ζ_1, ζ_2 自身以及它们的导数 ζ_1', ζ_2' 都很小,剖面轮廓线的法线几乎处处平行于 y 轴. 在这种情况下,我们可以假设,由于存在机翼而引起的扰动速度 $\boldsymbol{v}$, 和主流速度 U 相比,处处为一小量①. 机翼表面的边界条件为,

$$当\ y=\zeta\ 时, v_y/U=\zeta'.$$

根据所作的假设,我们可以让这一条件在 $y=0$, 而不是在 $y=\zeta$ 处成立. 因此,在横坐标轴的 $x=0$ 和 $x=l_x\equiv a$ 之间,必定有

$$\begin{aligned}&当\ y\to 0^+\ 时, v=U\zeta_2'(x);\\&当\ y\to 0^-\ 时, v=U\zeta_1'(x).\end{aligned}\tag{48.1}$$

为了应用复变函数论的方法,引进复速度

$$\frac{dw}{dz}=v_x-iv_y$$

(参阅 § 10), 它是变量 $z=x+iy$ 的解析函数. 在现在的情况下,该函数在横轴线段$(0,a)$上,必须满足下列条件:

$$\begin{aligned}&当\ y\to 0^+\ 时, \operatorname{Im}\left(\frac{dw}{dz}\right)=-U\zeta_2'(x);\\&当\ y\to 0^-\ 时, \operatorname{Im}\left(\frac{dw}{dz}\right)=-U\zeta_1'(x).\end{aligned}\tag{48.2}$$

为了解上面的问题, 我们首先将所要求的速度分布 $\boldsymbol{v}(x,y)$, 表示成两个分布之和:

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}^++\boldsymbol{v}^-,$$

这两个分布具有下列对称性:

$$\begin{aligned}&v_x^-(x,-y)=v_x^-(x,y),\ v_y^-(x,-y)=-v_y^-(x,y),\\&v_x^+(x,-y)=-v_x^+(x,y),\ v_y^+(x,-y)=v_y^+(x,y).\end{aligned}\tag{48.3}$$

单个速度分布 v^- 和 v^+ 的这些性质, 是不违背连续方程或势流方程的;并且因为问题是线性的,可以分别求取这两个分布.

---

① 在接近机翼圆钝前缘的一个小区域里,情形例外.

复速度相应地表示成两项之和:

$$w' = w'_+ + w'_-,$$

该和式的两项在线段$(0, a)$上满足的边界条件是

$$[\mathrm{Im} w'_+]_{y\to 0^+} = [\mathrm{Im} w'_+]_{y\to 0^-} = -\frac{1}{2}U(\zeta'_1 + \zeta'_2),$$
$$[\mathrm{Im} w'_-]_{y\to 0^+} = -[\mathrm{Im} w'_-]_{y\to 0^-} = \frac{1}{2}U(\zeta'_1 - \zeta'_2). \tag{48.4}$$

由柯西公式可以马上确定出函数 w'_-:

$$w'_-(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{w'_-(\xi)}{\xi - z} d\xi,$$

这里复变数ξ平面内的积分曲线是一个中心在$\xi = z$点的小半径圆L(图 28). 但周线L可以用一个无限大半径的圆C'和一条顺时针方向的周线C代替; 后一条曲线可以变为两次通过的线段$(0, a)$. 因为$w'(z)$在无穷远处为零, 沿C'的积分得零. 沿C的积分得出

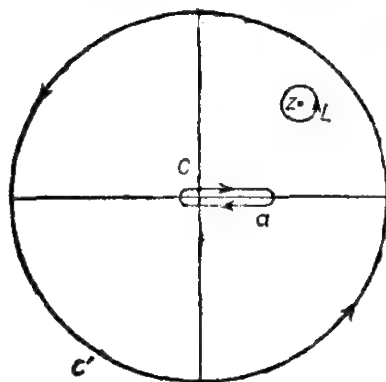


图 28

$$w'_- = -\frac{U}{2\pi}\int_0^a \frac{\zeta'_2(\xi) - \zeta'_1(\xi)}{\xi - z} d\xi. \tag{48.5}$$

此处, 我们应用了w'_-的虚部在线段$(0, a)$上的边界值(48.4), 并利用了这一事实, 即根据对称条件(48.3), w'_-的实部在跨过这一线段时是连续的.

为了求函数w'_+, 我们应当将柯西公式应用于乘积$w'_+(z)g(z)$, 而不是应用于该函数本身; 其中

$$g(z) = \sqrt{\frac{z}{z-a}},$$

并且当 $z=x>a$ 时，方根取正号．在实轴的线段 $(0,a)$上，函数 $g(z)$是纯虚的，并且是不连续的，即

$$g(x+i0)=-g(x-i0)=-i\sqrt{\frac{x}{a-x}}.$$

由 $g(z)$函数的这些性质，可清楚地看出：乘积 gw'_+ 的虚部在跨过线段$(0,a)$时是不连续的，而实部是连续的，这和函数 w'_- 一样．因此，完全类似于公式(48.5)的推导，有

$$w'_+(z)g(z)=-\frac{U}{2\pi}\int_0^a\frac{\zeta'_1(\xi)+\zeta'_2(\xi)}{\xi-z}g(\xi+i0)d\xi.$$

综合以上各表达式，得到薄翼绕流速度分布的下列公式：

$$\frac{dw}{dz}=-\frac{U}{2\pi i}\sqrt{\frac{z-a}{z}}\int_0^a\frac{\zeta'_1(\xi)+\zeta'_2(\xi)}{\xi-z}\sqrt{\frac{\xi}{a-\xi}}d\xi$$
$$-\frac{U}{2\pi}\int_0^a\frac{\zeta'_2(\xi)-\zeta'_1(\xi)}{\xi-z}d\xi. \qquad (48.6)$$

在圆钝前缘附近(即当 $z\to0$ 时)，这个式子一般说来要变为无限大，以上近似在这一区域中是不成立的．在尖锐后缘附近(即当 $z\to a$ 时)，(48.6)的第一项为有限值，但第二项却变为无限大，尽管它仅仅是以对数的方式发散①．这个对数奇性是由所用的近似所引起的，更精确的处理可以消除这一奇性．根据儒可夫斯基-恰布雷金条件，在后缘不存在幂次律的发散．由于上面对所用 $g(z)$函数作了适当选择，这一条件已经得到满足．

公式(48.6)使我们能立即求出绕翼剖面的速度环量．根据一般规则(见§10)，Γ 可由函数 $w'(z)$在单极点 $z=0$ 的残数给出．把 $w'(z)$ 在无穷远点展开为 $1/z$ 的各次幂，很容易求出所需的残数，就是展开式中 $1/z$ 的系数，即

① 如果在后缘附近，ζ_1 和 ζ_2 以$(a-x)^k$(其中 $k>1$)的方式趋于零，即假如后缘为一尖点，这一发散就不会出现了．

$$\frac{dw}{dz}=\frac{\Gamma}{2\pi iz}+\cdots,$$

其中Γ可由下面的简单公式求出:

$$\Gamma=U\int_0^a(\zeta_1'+\zeta_2')\sqrt{\frac{\xi}{a-\xi}}d\xi. \tag{48.7}$$

应当指出，这里出现的只是函数 ζ_1 和 ζ_2 的和．如果用一个形状由函数$(\zeta_1+\zeta_2)/2$ 表示的弯曲平板去代替薄翼，则升力不变．

例如，当一无穷长薄平板翼倾斜成小攻角 α 时，我们有

$$\zeta_1=\zeta_2=\alpha(a-x),$$

因而公式(48.7)就给出

$$\Gamma=-\pi\alpha aU.$$

该机翼的升力系数为

$$C_y=-\frac{\rho U\Gamma}{\frac{1}{2}\rho U^2a}=2\pi\alpha.$$

第五章　流体中的导热

§49. 传热的普遍方程

我们在§2的末尾已经提到过，完备的流体动力学方程组必须包含五个方程．对于有导热和内摩擦过程的流体来说，其中一个方程仍然是连续方程，但是欧拉方程组要换成纳维-斯托克斯方程组．其次，理想流体中的第五个方程是熵守恒方程(2.6)．而在粘性流体中，由于有能量耗散的不可逆过程发生，这个方程当然不成立．

在理想流体中，能量守恒定律由方程(6.1)来表示

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho v^2+\rho\epsilon\right)=-\nabla\cdot\left[\rho \boldsymbol{v}\left(\frac{1}{2}v^2+w\right)\right].$$

上述表达式的左边是单位体积流体内的能量变化率，右边则是能量通量密度的散度．当然，在粘性流体中能量守恒定律仍然成立，即在任何体积中，单位时间内流体总能量的变化必须仍旧等于通过该体积界面总的能量通量．但是能量通量密度现在具有另外一种形式，即除了流体运动中由单纯质量转移引起的能量通量 $\rho\boldsymbol{v}\left(\frac{1}{2}v^2+w\right)$之外，还有由内摩擦过程引起的能量通量．这后一种通量由矢量 $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\sigma}'$给出，其分量为$v_i\sigma'_{ik}$(见§16)．此外，能量通量中还必须包含另外一项．如果整个体积中流体的温度不是常量，则除了上述两种能量转移之外，必定还有称为**导热**的热转移．这意味着从高温处向低温处有分子能量的直接转移．这种能量的转移与宏观运动无关，即使在静止的流体中也会发生．

用 $\boldsymbol{q}$ 表示由导热引起的热通量密度．通量 $\boldsymbol{q}$ 与流体的温度变

化有关．在流体中温度梯度不太大的情形下，立即可以写出这种关系；在导热的现象中，我们涉及的几乎都是这种情形．这时可以将 $\boldsymbol{q}$ 展成温度梯度的幂级数，并且只取展开式中的一次项．因为当 ∇T 为零时 $\boldsymbol{q}$ 必须为零，所以常数项显然为零．因此得

$$\boldsymbol{q}=-\kappa\nabla T. \tag{49.1}$$

常数 κ 称为**导热系数**．因为能量通量必定是从高温的地方流向低温的地方，我们立刻可以看出，$\boldsymbol{q}$ 和 ∇T 必须反向，所以 κ 总是正的．一般说来，导热系数 κ 是温度和压力的函数．

因此，当有粘性和导热时，流体中总的能量通量为

$$\rho\boldsymbol{v}\left(\frac{1}{2}v^2+w\right)-\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\sigma}'-\kappa\nabla T.$$

所以，能量守恒的普遍定律由以下的方程给出：

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho v^2+\rho\epsilon\right)=-\nabla\cdot\left[\rho\boldsymbol{v}\left(\frac{1}{2}v^2+w\right)-\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\sigma}'-\kappa\nabla T\right]. \tag{49.2}$$

这个方程可以用来完备粘性流体的流体动力学方程组．但是为了方便起见，借助于运动方程组将方程(49.2)变换成另一种形式．为此，从运动方程组出发，我们来计算单位体积内流体能量的时间导数，则得

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho v^2+\rho\epsilon\right)=\frac{1}{2}v^2\frac{\partial\rho}{\partial t}+\rho\boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}+\rho\frac{\partial\epsilon}{\partial t}+\epsilon\frac{\partial\rho}{\partial t}.$$

由连续方程消去 $\partial\rho/\partial t$，再由纳维-斯托克斯方程消去 $\partial\boldsymbol{v}/\partial t$，得

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho v^2+\rho\epsilon\right)=-\frac{1}{2}v^2\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v})-\rho\boldsymbol{v}\cdot\nabla\left(\frac{1}{2}v^2\right)-\boldsymbol{v}\cdot\nabla p+$$

$$+v_i\frac{\partial\sigma'_{ik}}{\partial x_k}+\rho\frac{\partial\epsilon}{\partial t}-\epsilon\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v}).$$

现在利用热力学关系

$$d\epsilon = Tds - pdV = Tds + (p/\rho^2)d\rho,$$

求得

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} = T\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{p}{\rho^2}\frac{\partial \rho}{\partial t} = T\frac{\partial s}{\partial t} - \frac{p}{\rho^2}\nabla\cdot(\rho \boldsymbol{v}).$$

将其代入前一个式子，并引入焓 $w = \epsilon + p/\rho$，我们得到

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho\epsilon\right) = -\left(\frac{1}{2}v^2 + w\right)\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v}) - \rho\boldsymbol{v}\cdot\nabla\left(\frac{1}{2}v^2\right) - \\ -\boldsymbol{v}\cdot\nabla p + \rho T\frac{\partial s}{\partial t} + v_i\frac{\partial \sigma'_{ik}}{\partial x_k}.$$

其次，由热力学关系 $dw = Tds + dp/\rho$，我们有 $\nabla p = \rho\nabla w - \rho T\nabla s$. 于是上述方程右边的最后一项可以写成

$$v_i\frac{\partial \sigma'_{ik}}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k}(v_i\sigma'_{ik}) - \sigma'_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k} \equiv \nabla\cdot(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\sigma}') - \sigma'_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k}.$$

将这些表达式代入，并加上一个和减去一个 $\nabla\cdot(\kappa\nabla T)$，即得

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho\epsilon\right) = -\nabla\cdot\left[\rho\boldsymbol{v}\left(\frac{1}{2}v^2 + w\right) - \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\sigma}' - \kappa\nabla T\right] + \\ + \rho T\left(\frac{\partial s}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla s\right) - \sigma'_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \nabla\cdot(\kappa\nabla T). \tag{49.3}$$

将这个单位体积内流体能量的时间导数表达式与式(49.2)作比较，我们有

$$\rho T\left(\frac{\partial s}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla s\right) = \sigma'_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \nabla\cdot(\kappa\nabla T). \tag{49.4}$$

这个方程称为**传热的普遍方程**．如果没有粘性和导热，则其右边为零，就得到理想流体中的熵守恒方程(2.6)．

我们还应该对方程(49.4)作下述说明．该表达式的左边正好是熵对时间的全导数 ds/dt 乘上 ρT．量 ds/dt 给出单位质量流体在空间移动过程中的熵的变化率，于是 Tds/dt 是单位质量流体在单位时间内获得的热量，所以 $\rho Tds/dt$ 是单位体积流体所获

得的热量. 因此从式 (49.4) 看出, 单位体积流体所获得的热量为

$$\sigma'_{ik}\partial v_i/\partial x_k+\nabla\cdot(\kappa\nabla T).$$

其中第一项是由于粘性而耗散成热的能量, 第二项是传入该体积内的热量.

将 σ'_{ik} 的表达式(15.3)代入式(49.4), 并将项 $\sigma'_{ik}\partial v_i/\partial x$ 展开,则得

$$\sigma'_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k}=\eta\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\frac{\partial v_k}{\partial x_i}-\frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\right)+\zeta\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\delta_{ik}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}.$$

容易验证,第一项可以写成

$$\frac{1}{2}\eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\frac{\partial v_k}{\partial x_i}-\frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\right)^2,$$

第二项为

$$\zeta\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\delta_{ik}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}=\zeta\frac{\partial v_i}{\partial x_i}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\equiv\zeta(\nabla\cdot\boldsymbol{v})^2.$$

因此方程(49.4)变成

$$\rho T\left(\frac{\partial s}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\nabla s\right)=\nabla\cdot(\kappa\nabla T)+\frac{1}{2}\eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\frac{\partial v_k}{\partial x_i}-\right.$$

$$\left.-\frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\right)^2+\zeta(\nabla\cdot\boldsymbol{v})^2. \qquad (49.5)$$

由于导热和内摩擦是不可逆过程, 所以流体的熵增加了. 当然, 这里并不是分别指每个流体体元的熵, 而是指整个流体的总熵,它等于积分

$$\int\rho s dV.$$

每单位时间内熵的改变由下述导数给出

$$d\left[\int\rho s dV\right]/dt=\int[\partial(\rho s)/\partial t]dV.$$

利用连续方程及方程(49.5),我们有

$$\frac{\partial(\rho s)}{\partial t}=\rho\frac{\partial s}{\partial t}+s\frac{\partial\rho}{\partial t}=-s\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v})-\rho\boldsymbol{v}\cdot\nabla s+\frac{1}{T}\nabla\cdot(\kappa\nabla T)+$$

$$+\frac{\eta}{2T}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\frac{\partial v_k}{\partial x_i}-\frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\right)^2+\frac{\zeta}{T}(\nabla\cdot\boldsymbol{v})^2.$$

上式右边的头两项合在一起就是$-\nabla\cdot(\rho s\boldsymbol{v})$. 其体积分可以变换成熵通量$\rho s\boldsymbol{v}$在该体积表面上的曲面积分. 如果我们研究一个在无穷远处静止的无界的流体体积,则其界面可移至无穷远处,这时界面上的被积函数为零, 所以积分本身为零. 将上式右边第三项的积分作如下变换:

$$\int\frac{1}{T}\nabla\cdot(\kappa\nabla T)dV=\int\nabla\cdot\left(\frac{\kappa\nabla T}{T}\right)dV+\int\frac{\kappa(\nabla T)^2}{T^2}dV.$$

假定流体温度在无穷远处是足够快地趋向于一个定值, 我们可以将其中第一个积分变换成无穷远处曲面上的积分, 在该曲面上有$\nabla T=0$,所以该积分为零.

最后的结果是

$$\frac{d}{dt}\int\rho s dV=\int\frac{\kappa(\nabla T)^2}{T^2}dV+\int\frac{\eta}{2T}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\frac{\partial v_k}{\partial x_i}-\right.$$
$$\left.-\frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\right)^2dV+\int\frac{\zeta}{T}(\nabla\cdot\boldsymbol{v})^2dV. \qquad (49.6)$$

上式右边的第一项是由导热引起的熵的增长率, 其它两项则是由内摩擦引起的熵的增长率. 熵只能增加, 即式(49.6)右边之和必须是正的. 上式右边任何一项的被积函数都有可能不为零, 即使其它两个积分为零时也是这样. 由此可见, 除了我们已经知道κ和η是正的以外,第二粘性系数ζ也是正的.

在导出公式(49.1)时, 已隐含了假定热通量只决定于温度梯度,而与压力梯度无关. 这个假定并不是一开始就一目了然的,现在可以论证如下:如果$\boldsymbol{q}$有正比于∇p的项, 则在熵变化率表达式(49.6)的被积函数中, 将会包含有乘积$(\nabla p)\cdot(\nabla T)$的项. 因为这

一项可正可负，则熵的时间导数就不一定是正的了，而这是不可能的.

最后，上述这些推论还必需澄清如下. 严格地说，在一个热力学不平衡的系统中，象在具有速度梯度和温度梯度这样的流体中，有关热力学量的通常定义已失去意义，因而必需加以修正. 首先必须规定，ρ、ϵ 和 $\boldsymbol{v}$ 仍和以前一样定义，即 ρ 和 $\rho\epsilon$ 是单位体积流体的质量和内能，$\boldsymbol{v}$ 是单位质量流体的动量. 然后，剩下的热力学量就可定义为 ρ 和 ϵ 的函数，其函数关系和它们在热平衡时相同. 但是熵 $s=s(\rho, \epsilon)$ 不再是真正的热力学熵；严格地说，积分

$$\int \rho s dV$$

并不一定是随着时间而增加的量. 然而容易看出，当速度梯度和温度梯度很小时，在现在所采用的近似程度下，s 和真正的熵相同. 这是由于：如果此时存在着某些梯度，则一般会导致熵的附加项(除了 $s(\rho, \epsilon)$ 以外)，不过能够改变上述结果的项只有梯度的线性项(例如，正比于标量 $\nabla\cdot\boldsymbol{v}$ 的项)，这些项必定会使正值和负值都可能出现. 但是，因为平衡值 $s=s(\rho, \epsilon)$ 是最大的可能值，所以它们应该一定的负的. 因此，在熵对各种小梯度的幂级数展开式中，只能包含有(除了零次项以外)二阶和更高阶的项.

§15 中已作过类似的注释(参看该节的第一条脚注)，因为只要有速度梯度出现，就意味着热力学平衡状态的破坏. 在粘性流体动量通量密度张量表达式中出现的 p，必须取它在热平衡时的同一函数 $p=p(\rho, \epsilon)$. 严格地说，这种情况下的 p 已不是通常意义下的压力，即不是作用在面元上的法向力. 和熵的情况不同(见上述)，这里要出现小梯度的一阶量；我们已经看到，除了 p 以外，力的法向分量还包含一个正比于 $\nabla\cdot\boldsymbol{v}$ 的项(在不可压缩流体中，这一项为零，于是差别只是更高阶的量).

因此，在我们所取的近似中(即略去速度、温度等等的更高阶的导数时)，出现在有粘性导热的流体运动方程组中的三个系数η、ζ和κ，完全确定了流体的流体动力学性质. 再引入任何其它的项(例如，在质量通量密度中包含正比于密度梯度或温度梯度的项)都是没有实际意义的，而且至少将意味着基本物理量定义的改变；特别是速度将不再是单位质量流体的动量①.

§ 50. 不可压缩流体中的导热

在某些情形下，导热的普遍方程(49.4)或(49.5)可以大为简化. 如果流体的速度远小于声速，则由该运动产生的压力变化是如此之小，以致由它引起的密度变化(以及其它热力学量的变化)可以忽略不计. 但是在上述的意义下，非均匀加热的流体还不是完全不可压缩的. 因为它的密度随着温度的变化而变化，这种变化通常是不能忽略不计的. 于是，即使在速度很小的情形下，非均匀加热的流体的密度也不能假定是不变的. 所以在这种情形下确定热力学量的导数时，有必要假定压力是不变的，而不是假定密度不变. 因此，我们有

$$\frac{\partial s}{\partial t}=\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p\frac{\partial T}{\partial t},\qquad \nabla s=\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p\nabla T,$$

又因为$T(\partial s/\partial T)_p$是定压比热$c_p$，于是得到

$$T(\partial s/\partial T)_p=c_p\partial T/\partial t,\qquad T\nabla s=c_p\nabla T.$$

① 更坏的情形是下述后果：引入这样的项可以破坏必要的守恒定律. 必须记住，无论采用什么样的定义，质量通量密度$\boldsymbol{j}$必须始终是单位体积流体的动量. 因为$\boldsymbol{j}$是由连续方程定义的，即

$$\partial\rho/\partial t+\nabla\cdot\boldsymbol{j}=0,$$

将上式乘上$\boldsymbol{r}$，并在该流体体积上积分，我们有

$$d\left(\int\rho\boldsymbol{r}dV\right)\Big/dt=\int\boldsymbol{j}dV,$$

同时，因为积分$\int\rho\boldsymbol{r}dV$确定质心的位置，所以积分$\int\boldsymbol{j}dV$显然就是动量.

所以方程(49.4)变成

$$\rho c_p\left(\frac{\partial T}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\nabla T\right)=\nabla\cdot(\kappa\nabla T)+\sigma'_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k}. \tag{50.1}$$

对于非均匀加热的流体，如果在运动方程中要假定密度不变的话，则流体的速度必须远小于声速，同时流体中的温度差也应当很小．我们强调一下，这里是指温度的实际差值，而不是指温度梯度．这样条件下的流体才可以假定是通常意义上的不可压缩流体；特别是，连续方程就是 $\nabla\cdot\boldsymbol{v}=0$．假定了温度差很小，就可以忽略 η,κ，和 c_p 随温度的变化，而认为它们是常数．我们象式(49.5)中那样写出 $\sigma'_{ik}\partial v_i/\partial x_k$，就得到不可压缩流体的传热方程，它有下面比较简单的形式

$$\frac{\partial T}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)T=\chi\,\Delta T+\frac{\nu}{2c_p}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)^2, \tag{50.2}$$

其中 $\nu=\eta/\rho$ 是运动粘性系数，并且已经用了**导温系数** χ 来代替 κ，χ 的定义为

$$\chi=\kappa/\rho c_p. \tag{50.3}$$

对于不可压缩流体处于静止的情形，传热方程特别简单，其中能量的转移完全是由导热所产生的．略去方程(50.2)中所包含的速度的项，我们就有

$$\partial T/\partial t=\chi\,\Delta T. \tag{50.4}$$

这个方程在数学物理中称为**导热方程**或**傅里叶方程**．当然，我们可以更为简单地得出导热方程，而不必利用运动流体中传热的普遍方程．根据能量守恒定律，单位时间内某体积所吸收的热量必须等于通过该体积的界面而进入的总的热通量．就我们所知，这样的守恒定律能够表示成热量的“连续方程”．由单位时间内单位体积所吸收的热量等于负的热通量密度的散度，我们就得到这个方程．前者是 $\rho c_p\partial T/\partial t$；因为在整个静止的流体中，压力当然不变，所以我们必须取比热 c_p．令 $\rho c_p\partial T/\partial t$ 等于 $-\nabla\boldsymbol{q}=\kappa\nabla T$，我们

就得到方程(50.4)。

必须指出，将导热方程(50.4)应用到流体中去的可能性实际上是非常有限的. 因为在引力场中的流体，即使有很小的温度梯度，通常就会引起相当大的运动(**对流**，见§56). 因此，只有当温度梯度的方向与引力的方向相反时，或者流体的粘性非常大时，实际上才能有静止的流体. 然而，由于固体中的导热过程也由方程(50.4)形式的导热方程来描写，所以研究这个方程就非常重要. 因此，在§51和§52中，我们将更为详细地讨论导热方程.

如果非均匀加热的静止介质的温度分布在时间过程中保持不变(借助于外部的某种热原)，则导热方程变成

$$\Delta T = 0. \tag{50.5}$$

因此静止介质中的定常温度分布满足拉普拉斯方程. 在 κ 不能认为是常数的更一般的情形下，我们用方程

$$\nabla\cdot(\kappa\nabla T) = 0 \tag{50.6}$$

来代替方程(50.5)。

如果流体包含有外部热源(例如用电流加热)，则导热方程必须相应地包含附加项. 设 Q 是这些外部热源在单位时间内加给单位体积流体的热量；一般说来，Q 是空间坐标和时间的函数. 于是热平衡方程(即导热方程)为

$$\rho c_p \partial T/\partial t = \kappa\nabla T + Q. \tag{50.7}$$

现在来给出导热方程的边界条件，即在两种介质界面上要满足的条件. 首先，两种介质的温度在边界上必须相等，即

$$T_1 = T_2. \tag{50.8}$$

此外，从一种介质流出的热通量必须等于流入另一种介质的热通量. 将坐标系取在所讨论的这部分界面上(此时，这部分界面相对于坐标系是静止的)，对于每一个面元 df，我们可以将这个条件写成

$$(\kappa_1\nabla T_1)\cdot df=(\kappa_2\nabla T_2)\cdot df.$$

令$(\nabla T)\cdot df=(\partial T/\partial n)df$，其中$\partial T/\partial n$是$T$沿界面法向的导数，则得该边界条件的形式为

$$\kappa_1\partial T_1/\partial n=\kappa_2\partial T_2/\partial n. \tag{50.9}$$

如果在分界面上还有外部热源，其单位时间内在单位面积上产生的热量为$Q^{(s)}$，则边条件(50.9)必须代之以

$$\kappa_1\partial T_1/\partial n-\kappa_2\partial T_2/\partial n=Q^{(s)}. \tag{50.10}$$

在涉及温度分布的实际问题中，如果存在有热源，热源强度通常表示为温度的函数．如果函数$Q(T)$随T增加得足够快，则在其边界上保持着固定条件(例如保持特定的温度)的物体中，建立定常的温度分布是不可能的．传出物体外表面的热损失将正比于物体和外部介质之间的温度差$T-T_0$，而与物体内部产生热的规律无关．显然，如果热的产生随温度增加得足够快，则单靠热损失可能就不足以达到平衡状态．

关于建立定常热状态的不可能性，构成了**热爆炸理论**的基础，这种理论是由谢苗诺夫(Н. Н. Семёнов, 1928)发展起来的．如果放热的燃烧反应速度随温度增加得足够快，定常分布的不可能性就导致物质的快速地非定常点火，并由反应的加速而演变成为爆炸．对于热生成是温度的指数函数的情形，弗兰克-卡缅涅茨基(Д. А. Франк-Каменецкий)已给出了定量的理论(见问题1)①．

问　题

问题1． 设由两个平行的无限大平面所界的物质层中，分布有单位体积

① 爆炸燃烧的反应速率与温度的依赖关系可粗略地表示为$e^{-U/RT}$，因而热的生成速率也是如此，其中常数U很大．弗兰克-卡缅涅茨基已经证明：为了研究热爆炸的条件，必须讨论当物质点火还比较慢时的反应过程．于是用$e^{-U/RT_0}e^{U(T-T_0)/RT_0^2}$来代替$e^{-U/RT}$，其中$T_0$是外界的温度．更详细的讨论见：Д. А. Франк-Каменецкий, *Диффузия и теплопередача в химической кинетике*, изд. АНСССР, 1947.

的强度为 $Q=Q_0e^{\alpha(T-T_0)}$的热源，且两平面上保持不变的温度 T_0，试求可能出现定常温度分布的条件.

解: 在这里，定常的导热方程为

$$\kappa d^2T/dx^2=-Q_0e^{-\alpha(T-T_0)},$$

边界条件为

当 $x=0$ 和 $x=2l$ 时; $T=T_0$,

其中 $2l$ 是该介质层的厚度. 引入无量纲变数 $\tau=\alpha(T-T_0)$ 和 $\xi=x/l$. 则

$$\tau''+\lambda e^{\tau}=0,$$

其中

$$\lambda=Q_0\alpha l^2/\kappa.$$

将这个方程(乘上 $2\tau'$之后)积分一次，求得

$$\tau'^2=2\lambda(e^{\tau_0}-e^{\tau}),$$

其中 τ_0 为常数，它显然就是 τ 的最大值. 根据对称性，必须在该层的中间，即 $\xi=1$ 时，达到这个值. 所以根据条件 $\xi=0$ 时有 $\tau=0$，再积分一次得

$$\frac{1}{\sqrt{2\lambda}}\int_0^{\tau_0}\frac{d\tau}{\sqrt{(e^{\tau_0}-e^{\tau})}}=\int_0^1 d\xi=1.$$

算出该积分，我们有

$$e^{-\frac{1}{2}\tau_0}\ \mathrm{Arch}\ e^{\frac{1}{2}\tau_0}=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\lambda\right)}.$$

由这个方程确定的函数 $\lambda(\tau_0)$，在某个确定的值 $\tau_0=\tau_{0,临}$处具有最大值 $\lambda=\lambda_{临}$. 如果 $\lambda>\lambda_{临}$，则不存在满足边界条件的解①. 有关的数值为 $\lambda_{临}=0.88$, $\tau_{0,临}=1.2$②.

问题 2. 在静止流体中浸入一球. 设流体保持有恒定的温度梯度，试确定流体和球中最终的定常的温度分布.

解: 温度分布在整个空间中满足方程 $\Delta T=0$，在 $r=R$ 时有边界条件为

$$T_1=T_2,\quad \kappa_1\partial T_1/\partial r=\kappa_2\partial T_2/\partial r,$$

其中 R 是球的半径，带有下标 1 和下标 2 的量是分别指球上和流体中的值；同时在无穷远处有 $\nabla T=\boldsymbol{A}$，其中 $\boldsymbol{A}$ 是给定的温度梯度. 根据问题的对称性，$\boldsymbol{A}$ 是能够定出所需解的唯一矢量. 拉普拉斯方程的这样的解为

---

① 在 $\lambda<\lambda_{临}$时方程(1)的两个根中，只有较小的根对应于稳定的温度分布.

② 对于球状区域(其半径为 l)的对应值为 $\lambda_{临}=3.32$, $\tau_{0,临}=1.47$；而对于无限长的柱状区域，$\lambda_{临}=2.00$, $\tau_{0,临}=1.30$.

$$T = 常数 \times \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{r},$$

以及

$$T = 常数 \times \boldsymbol{A}\cdot\nabla\left(\frac{1}{r}\right).$$

注意到解在球心必须有限，我们寻求下列形式的解

$$T_1 = c_1\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{r}, \quad T_2 = c_2\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{r}/r^3 + \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{r}.$$

根据 $r=R$ 的条件，确定出常数 c_1 和 c_2，结果是

$$T_1 = \frac{3\kappa_2}{\kappa_1+2\kappa_2}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{r}, \quad T_2 = \left[1+\frac{\kappa_2-\kappa_1}{\kappa_1+2\kappa_2}\left(\frac{R}{r}\right)^3\right]\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{r}.$$

§ 51. 无限大介质中的导热

现在来研究无限大的静止介质中的导热．这类问题最一般的提法为：在初始时刻 $t=0$ 时给定整个空间的温度分布：

$$当\ t=0\ 时, T = T_0(x, y, z),$$

其中 T_0 是某个给定的坐标的函数，要求定出以后整个时间过程中的温度分布．

将所求的函数 T 展成坐标的傅里叶积分：

$$T = \int T_k(t)\exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})d^3\boldsymbol{k}, \quad d^3\boldsymbol{k} = dk_x dk_y dk_z, \tag{51.1}$$

其中展开式中的系数由下面的关系式给出：

$$T_k(t) = (2\pi)^{-3}\int T(x', y', z', t)\exp(-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}')dV',$$

$$dV' = dx'dy'dz'.$$

将表达式(51.1)代入方程(50.4)，则得

$$\int\left(\frac{dT_k}{dt} + k^2\chi T_k\right)\exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})d^3\boldsymbol{k} = 0,$$

由此

$$dT_k/dt + k^2\chi T_k = 0.$$

这个方程给出 T_k 为时间的函数：

$$T_k = \exp(-k^2\chi t)T_{0k}.$$

将其代入式(51.1)，求得

$$T=\int T_{0k}\exp(-k^2\chi t)\exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})d^3\boldsymbol{k}. \tag{51.2}$$

因为当 $t=0$ 时，必须有 $T=T_0(x,y,z)$，所以 T_{0k} 显然是函数 $T_0(x,y,z)$ 的傅里叶积分的展开系数：

$$T_{0k}=(2\pi)^{-3}\int T_0(x',y',z')\exp(-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}')dV'.$$

最后，将 T_{0k} 的上述表达式代入式(51.2)，就得到

$$T=(2\pi)^{-3}\iint T_0(x',y',z')\exp(-k^2\chi t)\exp[i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\times$$
$$\times dV'd^3\boldsymbol{k}.$$

对 $\boldsymbol{k}$ 的积分是三个简单积分的乘积，其每一个的形式为

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-k_x^2\chi t)\exp[ik_x(x-x')]dk_x$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-k_x^2\chi t)\cos k_x(x-x')dk_x;$$

因为正弦函数是奇函数，所以将式中 cos 换成 sin 后，类似的积分为零。利用下述公式

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-\alpha x^2)\cos\beta x dx=\sqrt{(\pi/\alpha)}\exp(-\beta^2/4\alpha)$$
$$(\alpha>0),$$

最后有

$$T(x,y,z,t)=\frac{1}{8(\pi\chi t)^{3/2}}\int T_0(x',y',z')\times$$
$$\times\exp\{-[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]4\chi t\}dV' \tag{51.3}$$

这个公式给出了问题的全部解答，它通过已知的初始温度分布确定了任何时刻的温度分布。

如果初始温度分布只是一个坐标 x 的函数，于是在公式(51.3)中能对 y' 和 z' 积分，由此得到

$$T(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{(\pi\chi t)}}\int_{-\infty}^{\infty}T_0(x')\exp[-(x-x')^2/4\chi t]dx'.$$

(51.4)

设在$t=0$时,除了在平面$x=0$处无限薄的一层上温度为无限大以外,整个空间的温度均为零,而在平面$x=0$这薄层上总的热量(正比于$\int T_0(x)dx$)是有限的. 这样的温度分布可以用δ函数来表示:$T_0(x)=$常数$\times\delta(x)$. 于是公式(51.4)的积分中只需将x'换成零即可,其结果为

$$T(x,t)=\text{常数}\times\frac{1}{2\sqrt{(\pi\chi t)}}\exp(-x^2/4\chi t). \tag{51.5}$$

类似地,如果初始时刻的有限热量集中在一点上(原点),则以后时刻的温度分布公式为

$$T(r,t)=\text{常数}\times\frac{1}{8(\pi\chi t)^{3/2}}\exp(-r^2/4\chi t), \tag{51.6}$$

其中r是到原点的距离. 在时间过程中,点$r=0$上温度按$t^{-3/2}$的规律减小. 而周围空间的温度相应地升高,同时温度显著地异于零的区域扩展在着(图29). 这种扩展的规律主要决定于公式(51.6)中的指数因子. 我们看出,这个区域线度的量级l是由$l^2/\chi t\sim1$决定的,所以

$$l\sim\sqrt{(\chi t)}, \tag{51.7}$$

即l随时间的平方根的增加而增加.

也可以用稍微不同的方法来说明公式(51.7). 设l是物体线

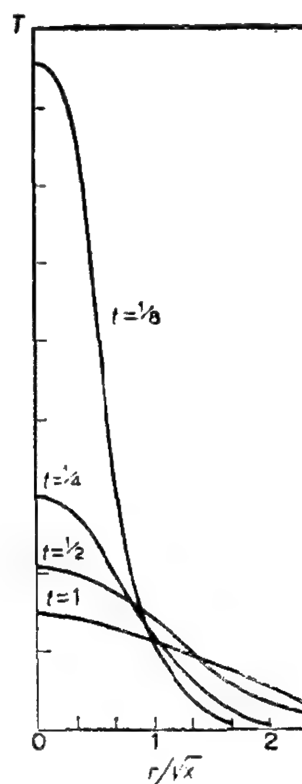


图 29

度的量级．于是我们可以认为，如果物体加热是不均匀的，则使整个物体的温度变得大体上相同所需时间的量级 τ 为

$$\tau \sim l^2/\chi. \tag{51.8}$$

时间 τ 可以称为导热的**弛豫时间**，τ 正比于物体线度的平方，同时反比于导温系数．

由上面公式所描述的导热过程具有这样的性质，即任何扰动的影响在瞬间就传遍整个空间．从公式(51.5)看出，来自点源的热是如此传播的，即使是顷刻之间，介质的温度也只是在无穷远处才等于零．对于导温系数依赖于温度的介质，只要 χ 处处不为零，这个性质同样成立．但是，如果 χ 是温度的某个函数，而当 $T=0$ 时有 $\chi=0$，则减缓了热的传播，以致在任一时刻，给定的扰动影响只扩展到空间的一个有限区域（我们推测这个区域以外温度可以看成为零）．这个结果连同下面问题的解，都是泽尔道维奇(Я. Б. Зельдович)和柯姆帕涅茨(А. С. Компанеец)在1950年得到的．

问　　题

问题 1. 一介质的比热和导温系数为温度的幂函数，而密度为常数．设在给定的时刻，某个区域已接收到由一任意热源传来的热(该区域的外面温度为零)，试求出温度在这个区域边界附近趋向于零的规律．

解： 如果 κ 和 c_p 为温度的幂函数，则导温系数 χ 和焓

$$w=\int c_p dT$$

(略去 w 中的常数)也是温度的幂函数．因此可以设 $\chi=aW^n$，其中 $W=\rho w$ 表示单位体积流体的焓．于是导热方程

$$\rho c_p \partial T/\partial t=\nabla\cdot(\kappa\nabla T)$$

变成

$$\partial W/\partial t=a\nabla\cdot(W^n\nabla W). \tag{1}$$

在很短的时间间隔内，该区域的一小块边界可以看成平面，它在空间的

位移速度 v 可以认为不变．由此，我们寻找方程(1)具有形式 $W=W(x-vt)$ 的解，其中 x 是其方向垂直于边界的坐标．我们有

$$-vdW/dx=ad(W^n dW/dx)/dx, \tag{2}$$

经过两次积分之后，由此求得 W 趋向于零的方式为

$$W\sim|x|^{1/n}, \tag{3}$$

其中 $|x|$ 是离受热区域边界的距离．这也证实了我们的结论：如果 $n>0$，则受热区域存在一个边界，在边界以外 W 和 T 均为零．如果 $n\leqslant 0$，则方程(2)没有在有限距离上趋向于零的解．即在所有时刻，热都分布在整个空间．

问题 2． 设在问题 1 的介质中，初始时刻有热量集中在平面 $x=0$ 上，其单位面积上的热量为 Q，除此以外，处处有 $T=0$．试确定以后各个时刻的温度分布．

解： 在一维的情形下，问题 1 中的方程(1)为

$$\frac{\partial W}{\partial t}=a\frac{\partial}{\partial x}\left(W^n\frac{\partial W}{\partial x}\right). \tag{1}$$

从我们能够利用的参数 Q 和 a 以及变量 x 和 t，只能构成一个无量纲的组合

$$\xi=x/(Q^n at)^{1/(2+n)}; \tag{2}$$

Q 和 a 的量纲分别为尔格/厘米^{2}和(厘米^2/秒)·(厘米^3/尔格)^n．因此，所求函数 $W(x,t)$ 的形式必须是

$$W=(Q^2/at)^{1/(2+n)}f(\xi), \tag{3}$$

这里是无量纲函数 $f(\xi)$ 乘上一个量纲为尔格/厘米^{2}的量．以此代入方程(1)，给出

$$(2+n)\frac{d}{d\xi}\left(f^n\frac{df}{d\xi}\right)+\xi\frac{df}{d\xi}+f=0.$$

这个常微分方程有一个简单的满足问题条件的解，即

$$f(\xi)=\left[\frac{1}{2}n(\xi_0^2-\xi^2)/(2+n)\right]^{1/n}, \tag{4}$$

其中 ξ_0 是积分常数．

当 $n>0$时，这个公式给出平面 $x=\pm x_0$ 之间区域中的温度分布($x=\pm x_0$ 对应于方程 $\xi=\pm\xi_0$)，在这个区域之外，$W=0$．由此得出，被加热区域随时间扩展的规律为

$$x_0=\text{常数}\times t^{1/(2+n)}.$$

常数 ξ_0 由总热量不变的条件来确定：

$$Q=\int_{-x_0}^{x_0} W\,dx=Q\int_{-\xi_0}^{\xi_0} f(\xi)\,d\xi, \tag{5}$$

由此我们有

$$\xi_0^{2+n}=\frac{(2+n)^{1+n}2^{1-n}}{n\pi^{n/2}}\frac{\Gamma^n\left(\frac{1}{2}+1/n\right)}{\Gamma^n(1/n)}. \tag{6}$$

当 $n=-\nu<0$ 时，我们将解写成形式

$$f(\xi)=\left[\frac{\nu}{2(2-\nu)}(\xi_0^2+\xi^2)\right]^{-1/\nu}. \tag{7}$$

这里，热分布在整个空间中，而在很大的距离上 W 随 $x^{-2/\nu}$ 而减小．这个解只适用于 $\nu<2$ 的情形，当 $\nu\geqslant 2$ 时，归一化积分(5)（现在积分区域扩展到 $\pm\infty$）发散，其物理意义是热立刻就被传导至无穷远处．当 $\nu<2$ 时，式(7)中的常数 ξ_0 由

$$\xi_0^{2-\nu}=\frac{2(2-\nu)\pi^{\nu/2}}{\nu}\frac{\Gamma^\nu\left(1/\nu-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma^\nu(1/\nu)}. \tag{8}$$

给出．

最后，当 $n\to 0$ 时，我们有 $\xi_0\to 2/\sqrt{n}$，由问题 1 中的公式(3)，以及此题的式(1)和式(4)，给出解为

$$W=\lim_{n\to 0}\left\{\frac{Q}{2\sqrt{\pi a t}}\left(1-n\frac{x^2}{4at}\right)^{1/n}\right\}=\frac{Q}{2\sqrt{\pi a t}}\exp(-x^2/4at),$$

它和公式(51.5)一致．

§52. 有限介质中的导热

在有限介质的导热问题中，初始温度分布不足以确定出唯一的解，还必须给定介质表面的边界条件．

现在来研究半无限空间($x>0$)中的导热问题，让我们从界面 $x=0$ 上保持某个恒定温度的情形开始，不妨把这个界面上的温度取为零．在初始时刻时，照例给定整个介质中的温度分布．于是边界条件和初始条件为

$$\text{在 } x=0 \text{ 上}, T=0; \tag{52.1}$$

当 $t=0$ 及 $x>0$ 时　$T=T_0(x,y,z)$.

借助于下面的技巧，导热方程满足这些条件的解可以化成各个方向都是无限的介质中的解．我们想象介质充满着平面 $x=0$ 的两边，当 $t=0$ 及 $x<0$ 时，温度分布给定为 $-T_0$，也就是在整个空间中，给定初始时刻的温度分布为 x 的奇函数：

$$T_0(-x,y,z)=-T_0(x,y,z). \tag{52.2}$$

根据等式(52.2)，有

$$T_0(0,y,z)=-T_0(0,y,z)=0,$$

即当 $t=0$ 时，自动满足必要的边界条件(52.1)，再根据对称性，显然对所有时刻 t 都满足这一条件．

因此，问题化为求无限介质中方程(50.4)的解，它具有满足式(52.2)的初始函数 $T_0(x,y,z)$，而没有边界条件．于是我们可以利用普遍公式(51.3)．现将 x' 的整个积分区域分成两个部分：从 $-\infty$ 到 0 和从 0 到 $+\infty$．利用关系式(52.2)，于是有

$$\begin{aligned}T(x,y,z,t)=&\frac{1}{8(\pi\chi t)^{3/2}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty}T_0(x',y',z')\times\\&\times\{\exp[-(x-x')^2/4\chi t]-\exp[-(x+x')^2/4\chi t]\}\times\\&\times\exp\{-[(y-y')^2+(z-z')^2]/4\chi t\}dx'dy'dz'\end{aligned} \tag{52.3}$$

这个公式给出了问题的解，因为它确定出整个介质(即所有 $x>0$ 处)的温度．

如果初始温度分布只是 x 的函数，则公式(52.3)变成

$$\begin{aligned}T(x,t)=&\frac{1}{2\sqrt{\pi\chi t}}\int_0^{\infty}T_0(x')\{\exp[-(x-x')^2/4\chi t]-\\&-\exp[-(x+x')^2/4\chi t]\}dx'.\end{aligned} \tag{52.4}$$

作为一个例子，现在来研究这样的情形，除了在 $x=0$ 之外，初始温度处处为一给定的常数．不失一般性，可取这个常数为 -1.

平面 $x=0$ 上的温度始终为零．将 $T_0(x)=-1$ 代入式(52.4)，立即得到相应的解．式(52.4)中的积分是两个积分之和，把每一个积分中的变量换成

$$\xi=(x'-x)/2\sqrt{\chi t},$$

则得 $T(x,t)$ 的表达式为

$$T(x,t)=\frac{1}{2}\{\mathrm{erf}[-x/2\sqrt{\chi t}]-\mathrm{erf}[x/2\sqrt{\chi t}]\},$$

其中函数 $\mathrm{erf}\,x$ 定义为

$$\mathrm{erf}\,x=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-\xi^2}d\xi, \tag{52.5}$$

并称为**误差函数**（注意，$\mathrm{erf}\,\infty=1$）．因为 $\mathrm{erf}(-x)=-\mathrm{erf}\,x$，我们最后有

$$T(x,t)=-\mathrm{erf}[x/2\sqrt{\chi t}]. \tag{52.6}$$

图 30中 画出了函数 $\mathrm{erf}\,x$ 的曲线．在时间过程中，空间的温度分布

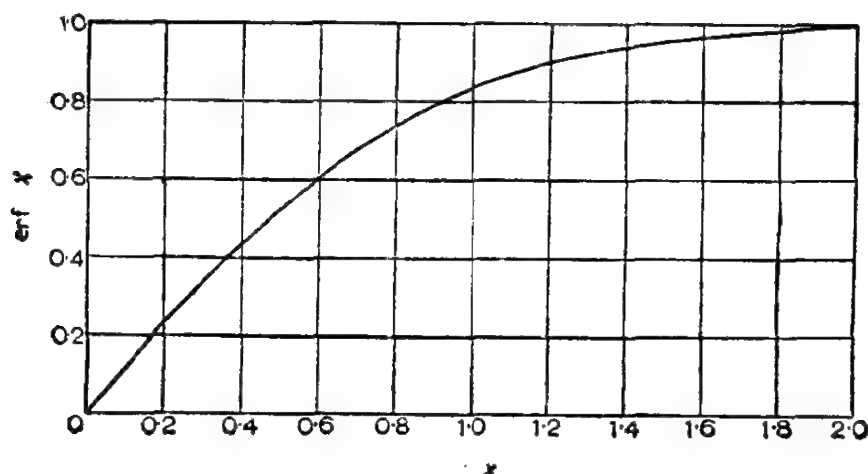


图 30

变得越来越均匀．这个过程是以这样一种方式进行的，即任何给定的温度值按正比于 $\sqrt{t}$ 的规律"移动"．显然，这个最后的结果是正确的．因为所讨论的问题只以一个参量为特征，这个参量即边界平面与其余空间之间的初始温度差 T_0；在上面的讨论中，这个差值被任意地取为1．从我们所能利用的参数 T_0 和 χ 以及变

数 x 和 t 中，只能构成一个无量纲的组合，即$x/\sqrt{\chi t}$，因此所求的温度分布显然必须由形式为 $T=T_0 f(x/\sqrt{\chi t})$ 的函数给出。

现在来研究介质界面是绝热的情形. 也就是说在平面 $x=0$ 上没有热通量，所以必须有 $\partial T/\partial x=0$. 由此我们有如下的边界条件和初始条件:

$$\left.\begin{aligned}&\text{当 } x=0 \text{ 时}, \partial T/\partial x=0;\\ &\text{当 } t=0 \text{ 及 } x>0 \text{ 时}, T=T_0(x, y, z).\end{aligned}\right\} \tag{52.7}$$

为了求解，我们按照前一个问题的办法来进行，即仍旧想象介质充满着平面 $x=0$ 的两边，这里初始温度对平面 $x=0$ 是对称的. 换句话说，现在假定 $T_0(x, y, z)$ 是 x 的偶函数:

$$T_0(-x, y, z)=T_0(x, y, z). \tag{52.8}$$

因此有

$$\partial T_0(x, y, z)/\partial x=-\partial T_0(-x, y, z)/\partial x,$$

以及

$$\text{在 } x=0 \text{ 时}, \partial T_0/\partial x=0.$$

显然，根据对称性，这些条件对所有的时间 t 都将继续满足.

重复以前给出的计算，但是用条件(52.8)来代替条件(52.2)，得出问题有如下形式的通解

$$\begin{aligned}T(x, y, z, t)=&\frac{1}{8(\pi\chi t)^{3/2}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty}T_0(x', y', z')\times\\&\times\{\exp[-(x'-x)^2/4\chi t]+\exp[-(x'+x)^2/4\chi t]\}\times\\&\times\exp\{-[(y'-y)^2+(z'-z)^2]/4\chi t\}dx'dy'dz'.\end{aligned} \tag{52.9}$$

如果 T_0 只是 x 的函数，于是

$$T(x, t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi\chi t}}\int_0^{\infty}T_0(x')\{\exp[-(x'-x^2)/4\chi t]+$$

$$+\exp[-(x'+x)^2/4\chi t]\}dx' \tag{52.10}$$

现在再来研究另一种类型边界条件的问题，也能将导热方程解成通解形式. 设热通量(给定的时间函数)通过界面 $x=0$ 进入介质，其边界条件和初始条件为

$$\left.\begin{array}{l}\text{在 } x=0 \text{ 时}, -\kappa\partial T/\partial x=q(t);\\ \text{当 } t=-\infty, x>0 \text{ 时}, T=0,\end{array}\right\} \tag{52.11}$$

其中 $q(t)$ 是给定的函数.

我们先来解一个辅助问题，其中 $q(t)=\delta(t)$. 很容易看出，这个问题实际上等价于在无限大介质中从点源发出的热传播问题，该点源产生出给定的热量. 这是因为 $x=0$ 的边界条件 $-\kappa\partial T/\partial x=\delta(t)$，它在物理上意味着在 $t=0$ 时通过平面 $x=0$ 上每一单位面积流入单位热量. 而在条件为 $t=0$ 时 $T=2\delta(x)/\rho c_p$ 的问题中，则表示当时刻 $t=0$ 时，有热量

$$\int \rho c_p T dx=2$$

集中在该面积上，然后其中一半沿 x 正向传播，另一半则沿 x 负向传播. 所以很清楚，这两个问题的解是一样的. 因此根据式(51.5)，我们求得

$$\kappa T(x,t)=\sqrt{\chi/\pi t}\exp(-x^2/4\chi t).$$

因为方程是线性的，不同时刻流入热量的影响可以简单地叠加，于是在条件(52.11)下，要求的导热方程的通解为

$$\kappa T(x,t)=\int_{-\infty}^{t}\sqrt{\frac{\chi}{\pi(t-\tau)}}q(\tau)\exp[-x^2/4\chi(t-\tau)]d\tau. \tag{52.12}$$

特别是，平面 $x=0$ 上温度的变化规律为

$$\kappa T(0,t)=\int_{-\infty}^{t}\sqrt{\frac{\chi}{\pi(t-\tau)}}q(\tau)d\tau \tag{52.13}$$

利用这些结果，立即可以得到另一个问题的解，其中在平面

$x=0$ 上温度 T 是给定的 t 的函数:

$$当\ x=0\ 时, T=T_0(t);$$

$$当\ t=-\infty, x>0\ 时, T=0. \tag{52.14}$$

为此我们指出，如果某个函数 $T(x, t)$满足导热方程，则它的导数 $\partial T/\partial x$ 也满足该方程. 将式(52.12)对 x 微分，我们得到

$$-\kappa\frac{\partial T(x, t)}{\partial x}=\int_{-\infty}^{t}\frac{xq(\tau)}{2\sqrt{[\pi\chi(t-\tau)^3]}}\exp[-x^2/4\chi(t-\tau)]d\tau.$$

这个函数满足导热方程，同时(根据式(52.11))在 $x=0$ 时，其值为 $q(t)$. 于是它给出具有条件(52.14)的问题所要求的解. 以 $T(x, t)$ 代替$-\kappa\partial T/\partial x$，并以 $T_0(t)$代替 $q(t)$，我们就得到

$$T(x, t)=\frac{x}{2\sqrt{(\pi\chi)}}\int_{-\infty}^{t}\frac{T_0(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}}\exp[-x^2/4\chi(t-\tau)]d\tau. \tag{52.15}$$

经过简单的计算，求出通过界面 $x=0$ 的热通量 $q=-\kappa\partial T/\partial x$ 为

$$q(t)=\frac{\kappa}{\sqrt{(\pi\chi)}}\int_{-\infty}^{t}\frac{dT_0(\tau)}{d\tau}\frac{d\tau}{\sqrt{(t-\tau)}}. \tag{52.16}$$

这个公式是式(52.13)的反演.

对于在界面 $x=0$ 上温度是时间的某个周期函数的这类重要问题，即在 $x=0$ 时有 $T=T_0e^{-i\omega t}$，很容易得出它的解. 很清楚，整个空间的温度分布也一定是通过因子 $e^{-i\omega t}$ 而依赖于时间的. 因为一维导热方程与方程(24.3)在形式上相同，而方程(24.3)确定了振动平面上部粘性流体的运动；由式(24.4)类推，我们立即可以写出所要求的温度分布，

$$T=T_0\exp[-x\sqrt{(\omega/2\chi)}]\exp\{i[x\sqrt{(\omega/2\chi)}-\omega t]\}. \tag{52.17}$$

我们看到，界面上温度的起伏以**热波**的形式向外传播，这种热波很快地在介质内部衰减掉.

另一类导热问题是：在非均匀加热的有限物体中，物体表面上保持给定的条件，研究其温度均匀化的速度．为了用一般的方法来求解这个问题，我们寻求导热方程具有 $T=T_n(x, y, z)e^{-\lambda_n t}$ 形式的解，其中λ_n 是常数．对于函数 T_n，我们有方程

$$\chi\Delta T_n = -\lambda_n T_n. \tag{52.18}$$

在给定的边界条件下，这个方程只有对某些特定的 λ_n，即方程的**本征值**，才有非零解．

所有本征值都是实数，而且是正的，同时对应的函数 $T_n(x, y, z)$构成了完备的正交函数系．函数 $T_0(x, y, z)$给出初始时刻的温度分布，将它展成函数 T_n 的级数，则

$$T_0(x, y, z)=\Sigma c_n T_n(x, y, z),$$

我们得到所求的解的形式为

$$T(x, y, z, t)=\Sigma c_n T_n(x, y, z)\exp(-\lambda_n t). \tag{52.19}$$

温度均匀化的速率显然由相应于最小 λ_n 的项决定，这个最小的 λ_n 可记作 λ_1．"均匀化时间"可以定义为 $\tau=1/\lambda_1$.

问　　题

问题 1. 设球面上（半径为R）温度是一个已给定的时间的函数 $T_0(t)$，试确定球面周围的温度分布．

解： 在中心对称的温度分布的条件下，导热方程在球坐标中可写为 $\partial T/\partial t=(\chi/r)\partial^2(rT)/\partial r^2$．将 $rT(rt)=F(r, t)$ 代入，并且将其简化为 $\partial F/\partial t=\chi\partial^2F/\partial r^2$，这就是通常的一维导热方程．于是，根据式(52.15)，立即可以找到所求的解，它是

$$T(r, t)=\frac{R(r-R)}{2r\sqrt{(\pi\chi)}}\int_{-\infty}^{t}\frac{T_0(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}}\exp[-(r-R)^2/4\chi(t-\tau)]d\tau.$$

问题 2. 与问题 1 相同，但是将球面上温度改为 $T_0e^{-i\omega t}$.

解： 类似于式(52.17)，我们得到

$$T=T_0\exp(-i\omega t)(R/r)\exp[-(1-i)(r-R)\sqrt{(\omega/2\chi)}].$$

问题 3. 设边长为 a 的立方体，其表面条件为：(a) 保持温度 $T=0$；(b) 是绝热面. 试确定温度均匀化的时间.

解： 在情形(a)中，λ 的最小值由方程(52.18)的下述解给出，即

$$T_1=\sin(\pi x/a)\sin(\pi y/a)\sin(\pi z/a)$$

(坐标原点取在立方体的一个角上)，这时 $\tau=1/\lambda_1=a^2/3\pi^2\chi$. 在情形(b)中，我们有 $T_1=\cos(\pi x/a)$ (或者是 y 或 z 的同一函数)，此时 $\tau=a^2/\pi^2\chi$.

问题 4. 与问题3相同，但是将立方体改成半径为 R 的球.

解： λ 的最小值由方程(52.18)的中心对称解 $T_1=(1/r)\sin kr$ 给出. 对于情形(a)，$k=\pi/R$，则 $\tau=1/\chi k^2=R/\chi\pi^2$，对于情形(b)，$k$ 是方程 $kR=\mathrm{tg}kR$ 的最小非零根，由此我们求得 $kR=4.493$，则 $\tau=0.050R^2/\chi$.

§ 53. 传热的相似律

流体中的传热过程比固体中更为复杂，因为流体还可以有运动. 一个热物体浸没在运动的流体中，比浸没在静止流体中的冷却要快得多，因为在静止流体中，只由导热来实现传热. 我们把非均匀加热流体的运动称为**对流**.

我们将假定流体中的温度差是如此之小，以致可以假设流体的物理性质与温度无关；同时，这一温度差又是如此之大，以致与它们相比，由内摩擦能量耗散产生的热所引起的温度改变仍可以忽略不计(见§55). 于是，方程(50.2)中的粘性项略去之后剩下

$$\partial T/\partial t+\boldsymbol{v}\cdot\nabla T=\chi\triangle T, \tag{53.1}$$

其中 $\chi=\kappa/\rho c_p$ 是导温系数. 这个方程，加上纳维-斯托克斯方程和连续方程，足以确定所讨论条件下的**对流**.

在下面的讨论中，我们的兴趣只限于定常的对流流动①. 于是所有的时间导数均为零，从而可得出下列基本方程：

$$\boldsymbol{v}\cdot\nabla T=\chi\triangle T, \tag{53.2}$$

① 为了使对流保持定常，严格地说，与流体接触的那些固体内必须有热源，以保持这些固体处于恒温状态.

$$(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}=-\nabla(p/\rho)+\nu\triangle\boldsymbol{v},\nabla\cdot\boldsymbol{v}=0 \tag{53.3}$$

这个方程组只包含两个不变的参数 ν 和 χ，方程组中未知函数为 $\boldsymbol{v}, T$ 和 p/ρ. 此外，方程组的解还通过边界条件而依赖于特征长度 l、速度 U 和温度差 T_1-T_2. 其中前两个量由问题中出现的物体线度和主流速度给定，而第三个量则由流体与这些物体之间的温度差给定.

当我们把可利用的参数组合成无量纲量时，首先就是要给出温度的量纲. 为了解决这个问题，应该看到温度是由方程(53.2)确定的，这是 T 的线性齐次方程. 因此，将温度乘上任何常数仍旧满足该方程. 换句话说，温度量度的单位可以任意选取. 由于温度可以作这种变换，所以允许赋予温度本身某个特有的量纲，而和其他量的量纲无关. 我们可以用通常的温度单位"度"来测量它.

因此，上述条件下的对流可用五个参数来表征，它们的量纲是 $[\nu]=[\chi]=$ 厘米^2/秒，$[U]=$ 厘米/秒，$[l]=$ 厘米，$[T_1-T_0]=$ 度. 由这些参数，我们可以构成两个独立的无量纲组合. 它们可以是雷诺数 $R=Ul/\nu$ 和定义为

$$P=\nu/\chi \tag{53.4}$$

的**普朗特数**. 任何其它的无量纲组合都可以用 R 和 P 来表示①.

普朗特数只是物性常数，而与流动的性质无关. 对于各种气体，它总是 1 的量级. 液体的 P 值变化较大. 对于非常粘滞的液体，它可以非常大. 下面是各种物质在 20°C 时的 P 值:

空气	0.733
水	6.75
酒精	16.6
甘油	7250

① 有时也用庇克里(Péclet)数，它定义为 $Ul/\chi=RP$.

水银　　　　0.044

象 § 19 那样，我们现在可以作出结论，在(上述类型的)定常对流中，温度和速度分布具有下述形式：

$$\frac{T-T_0}{T_1-T_0}=f\left(\frac{r}{l}, R, P\right), \quad \frac{v}{U}=f\left(\frac{r}{l}, R\right). \tag{53.5}$$

确定温度分布的无量纲函数同时依赖于两个参数 R 和 P. 但是，因为速度分布由方程(53.3)确定，此方程不包含导热系数，所以它只依赖于 R. 由此，如果两个对流流动的雷诺数和普朗特数相同，则它们是相似流动.

固体与流体之间的传热，通常用**传热系数** α 来表征，α 定义为

$$\alpha=q/(T_1-T_0), \tag{53.6}$$

其中 q 是通过界面的热通量密度，而 T_1-T_0 是固体和流体之间的特征温差. 如果已知流体中的温度分布，则通过计算流体边界上的热通量密度 $q=-\kappa\partial T/\partial n$(导数是沿界面法向取的)，很容易求得传热系数.

传热系数不是无量纲量. 表征传热的无量纲量是所谓的努塞尔(Nusselt)数①：

$$N=\alpha l/\kappa. \tag{53.7}$$

根据相似性分析，对于任何给定类型的对流，努塞尔数只是雷诺数和普朗特数的确定函数，即

$$N=f(R, P). \tag{53.8}$$

在雷诺数足够小的对流中，这个函数非常简单. 这种情形相当于速度很小的情形，因此在一级近似中，可以忽略方程(53.2)中的速度项. 所以温度分布由方程 $\triangle T=0$ (即通常的在静止介质中的定常导热方程)来确定. 因此，传热系数既不依赖于速度，也不

① 也常常采用无量纲的"传热数"，它定义为 $K_h=\alpha/\rho c_p U=N/RP$.

依赖于粘性系数，于是就必定有

$$N=\text{常数}. \tag{53.9}$$

在计算该常数时，可以假定流体是静止的。

问　　题

设流体沿圆截面管道作泊肃叶流动，且管壁上的温度沿管长线性变化，试确定流体中的温度分布.

解： 在管道的每一横截面上，流动条件相同，所以我们可以找到温度分布具有 $T=Az+f(r)$ 的形式，其中 Az 是管壁的温度. 我们采用极坐标，其 z 轴沿着管轴. 由式(17.9)，我们得速度为 $v_z=v=2v_m(1-r^2/R^2)$，其中 v_m 是平均速度. 代入式(53.2)，求得

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{df}{dr}\right)=\frac{2v_mA}{\chi}\left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right].$$

在 $r=0$ 时 f 为有限值，在 $r=R$ 时 $f=0$，所以这方程的解为

$$f(r)=-\frac{v_mAr^2}{2\chi}\left[\frac{3}{4}-\left(\frac{r}{R}\right)^2+\frac{1}{4}\left(\frac{r}{R}\right)^4\right].$$

热通量密度为

$$q=\kappa\,[\partial T/\partial r]_R=\frac{1}{2}\rho c_p v_m RA,$$

它与导热系数无关.

§54. 边界层内的传热

在雷诺数非常大时，流体中的温度分布显示出与速度分布相类似的性质. 非常大的 R 值等价于非常小的粘性系数. 但是因为数 $P=\nu/\chi$ 并不小，所以必须假定导温系数 χ 也象 ν 一样很小. 这与下述事实相当，即在足够高的速度下，流体可以近似地看作是理想流体，而在理想流体中，内摩擦和导温两者都不存在.

但是在边界层中必须再次放弃这种理想流体观点，因为它既不能满足无滑移边界条件，也不能满足等温边界条件. 所以在边界层中，同时发生速度迅速地减小以及流体温度迅速地改变到等

于固壁温度的情况．边界层就是以同时出现很大的速度梯度和温度梯度为其特征．

很容易了解，在绕加热物体的流动中（在R很大时），流体的加热几乎完全发生在尾迹中，而在尾迹的外面，流体温度没有变化．因为当R很大时，主流中的导热过程是不重要的，所以只有在边界层内经过加热的流体所能达到的区域中，温度才会变化．但我们知道（见§34），来自边界层的流线只有在分离之后进入主流，即在分离线之后，流线进入湍流尾迹区．但是流线完全不能从尾迹出来．于是绕加热物体表面在边界层内流动的流体完全进入了尾迹区，并且一直留在尾迹中．由此可见，热是分布在整个涡量不为零的区域中．

在湍流区本身，出现很可观的热交换，这是由于流体激烈的混合所引起的，这种激烈的混合是所有湍流流动的特征．这种传热机制可以称为**湍流导热**，它以系数$\kappa_{湍}$来表征，就象我们在§31中引入湍流粘性系数$\nu_{湍}$一样．使用定义$\nu_{湍}$的(31.2)式同样的公式，湍流导温系数在量级上可定义为$\chi_{湍}\sim l\triangle u$.

因此，层流流动和湍流流动中的传热过程有着根本的差别．在粘性系数和导热系数都非常小的极限情形下，层流流动没有传热过程，因此在空间的每一点上，流体的温度不变．但是在湍流流动中，即使在同样的极限情形下，传热也要发生，而且在流动的各个部分内温度迅速地均匀化．

必须指出，当我们谈到湍流运动中的流体温度时，我们总是指流体温度对时间的平均值．空间任何一点上的实际温度都经历着随时间非常不规则的变化，完全类似于速度的情况．

让我们从研究层流边界层中的传热开始．这时运动方程(39.10)保持其形式不变．现在必须对方程(53.2)作类似的简化．由于所有的量与坐标z无关，方程直接写出为

$$v_x\frac{\partial T}{\partial x}+v_y\frac{\partial T}{\partial y}=\chi\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right).$$

在上式右边，导数 $\partial^2 T/\partial x^2$ 与 $\partial^2 T/\partial y^2$ 相比可以略去，而剩下

$$v_x\frac{\partial T}{\partial x}+v_y\frac{\partial T}{\partial y}=\chi\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}. \tag{54.1}$$

将上式与方程(39.10)中的第一个方程作比较，我们看出，如果普朗特数是1的量级，则在速度 v_x 减小同时温度 T 变化的这一流体层中，其厚度的量级 δ 还是由§39得到的公式给出，即它将反比于 $\sqrt{R}$. 热通量 $q=-\kappa\partial T/\partial x$ 在量级上等于 $\kappa(T_1-T_0)/\delta$. 因此我们得出结论，q 以及由此得出的努塞尔数均正比于 $\sqrt{R}$. 但是 N 对 P 的依赖关系还没有确定. 所以我们有

$$N=\sqrt{R}f(P). \tag{54.2}$$

由此具体得出，传热系数 α 反比于物体线度 l 的平方根.

现在我们再来研究湍流边界层中的传热问题. 像在§42中一样，最方便的是研究沿无限平板的平面平行湍流. 采用求速度梯度 du/dy 时所作的量纲分析方法，可以定出上述平面平行湍流中的横向温度梯度 dT/dy. 我们用 q 表示由温度梯度引起的沿 y 轴的热通量密度. 这个通量与动量通量 σ 一样，是个常数（与 y 无关），而且这个通量也同样可以作为一个确定流动性质的已给参数. 此外，作为参数的还有密度 ρ 和单位质量的比热 c_p. 我们用 v_* 来代替 σ 作为参数. q 和 c_p 的量纲分别为尔格/厘米²秒＝克/秒³和尔格/克·度＝厘米²/秒²·度. 当 R 足够大时，dT/dy 中可以不显含粘性系数和导热系数.

在§53中已经谈到，因为方程对于温度的齐次性，所以温度可以改变任一倍数而不违反该方程. 但是，当温度这样改变时，热通量也必须改变同一倍数. 因此 q 和 T 必须成正比. 从 q、v_*、ρ、c_p 和 y 出发，我们只能构成一个正比于 q 而且具有量纲为度/厘米的量，即 $q/\rho c_p v_* y$. 由此，我们必定有 $dT/dy=\beta q/b\rho c_p v_* y$，其中

β 是数字常数，它必须由实验来加以确定①. 于是

$$T=(\beta q/b\rho c_p v_*)(\ln y+c). \tag{54.3}$$

因此和速度一样，温度按对数的关系变化. 这里出现的积分常数 c，像导出公式(42.7)时一样，必须由粘性底层的条件来确定. 在给定点上的流体和壁面(我们任意地取其温度为零)之间的温度差由两部分组成，即由穿过湍流层的温度改变量和穿过粘性底层的温度改变量组成. 对数律(54.3)仅由前者确定. 因此，如果将式(54.3)写成如下形式:

$$T=(\beta q/b\rho c_p v_*)[\ln(yv_*/\nu+\text{常数}],$$

其中对数的自变量有一因子等于厚度 y_0，于是该常数(乘上前面的系数)必定是穿过粘性底层的温度改变量. 当然，这一改变量也依赖于 ν 和 χ. 因为该常数是无量纲的，它必须是 P 的某个函数，而 P 是量 ν、χ、ρ、v_* 和 c_p 的唯一的无量纲组合(因为 T 必须正比于 q，而 q 已出现在系数中，所以在这里不再出现了). 于是求得温度分布为

$$T=(\beta q/b\rho c_p v_*)[\ln(yv_*/\nu+f(P)]. \tag{54.4}$$

利用这个公式，我们可以计算管道流动、沿平板流动等等的湍流传热，在这里就不作这种计算了.

问　　题

问题 1. 当 P 和 R 很大时，试确定层流边界层中努塞尔数对普朗特数依赖关系的极限形式.

解: 当 P 很大时，温度变化层的厚度 δ' 远小于速度 v_x 减小层的厚度 δ.

---

① 这里的 b 是出现在对数速度剖面式(42.4)中的常数. 根据这样的定义，β 是比值 $\nu_{湍}/\chi_{湍}$，其中 $\nu_{湍}$ 和 $\chi_{湍}$ 是 $q=\rho c_p\chi dT/dy$ 和 $\sigma=\rho\nu_{湍}du/dy$ 中的系数. 在管道流动和沿平面的流动中，可同时测定速度剖面和温度剖面，据此可求得 β 约为 0.7. 必须指出，在加热物体后面的湍流尾迹中作类似的测量，可以得出自由湍流中的比值 $\nu_{湍}/\chi_{湍}$ 约为 0.5。

δ' 可以称为温度边界层的厚度. 对方程(54.1)中各项进行量级估计, 可以得出 δ' 的量级. 在 $y=0$ 到 $y\sim\delta'$ 的距离内, 温度的改变量是流体和固体之间总的温度差 $T-T_0$ 的量级, 而速度在这个距离上的改变量是 $U\delta'/\delta$ 的量级(因为总的速度改变量(量级为U)发生在距离 δ 上). 于是当 $y\sim\delta'$ 时, 方程(54.1)中各项在量级上有

$$\chi\partial^2T/\partial y^2\sim\chi(T-T_0)/\delta'^2,$$

和

$$v_x\partial T/\partial x\sim U\delta'(T-T_0)/l\delta.$$

如果这两个表达式同一量级, 我们有 $\delta'^3\sim\chi l\delta/U$. 将 $\delta\sim l/\sqrt{R}$ 代入, 则得到

$$\delta'\sim l/R^{1/2}P^{1/3}\sim\delta/P^{1/3}.$$

因此当P很大时, 温度边界层厚度与速度边界层厚度之比按反比于P的立方根的规律减小.

热通量 $q=-\kappa\partial T/\partial y\sim\kappa(T_1-T_0)/\delta'$, 于是得出所求的传热的极限定律为①

$$N=\text{常数}\times R^{1/2}P^{1/3}.$$

问题 2. 设温度具有对数分布规律 (54.4). 当P很大时, 试确定函数 $f(P)$ 的极限形式.

解: 根据 § 42 中的讨论, 粘性底层中的横向速度为 $v_*(y/y_0)^2$ 的量级, 湍流尺度是 y^2/y_0 的量级. 于是湍流导温系数 $\chi_{湍}$的量级为

$$v_*y_0(y/y_0)^4\sim\nu(y/y_0)^4$$

(其中我们已经利用了关系式 (42.5)). 所以在 $y=y_0P^{-1/4}$ 的距离上, $\chi_{湍}$ 的值与通常的导温系数相当. 因为 $\chi_{湍}$随 y 增加得非常快, 显然在粘性底层中, 绝大部分温度变化发生在离壁面为 y_1 的距离上, 并且可以假定它正比于y_1, 即在量级上具有

$$qy_1/\kappa\sim qy_0/\kappa P^{1/4}\sim qP^{3/4}/\rho c_pv_*.$$

---

① 对于实际上求得的各导温系数的值, 普朗特数达不到使这个极限定律成立的值. 但是, 这样的定律可以应用到对流扩散中去, 对流扩散满足与对流传热相同的方程, 但是要用溶质的浓度来代替温度; 并用溶质通量来代替热通量, 而“扩散普朗特数”定义为 $P_D=\nu/D$, 其中D是扩散系数. 例如, 对于水溶液和类似的液体, P_D可达10^3的量级; 而对于非常粘滞的溶剂, P_D 是 10^6 的量级, 或者还要高.

与公式(54.4)作比较，我们看出函数 $f(P)$ 是 $P^{3/4}$ 乘上一个常数[①].

问题 3. 在非均匀加热的湍动流体中，试确定在远小于湍流外尺度的距离 λ 内的温度差 T_λ(奥布霍夫, A. M. Обухов, 1949).

解: 在非均匀加热的湍动流体中，温度均匀化的过程类似于机械能的耗散. 尺度 $\lambda \gg \lambda_0$ 的湍流涡(这里 λ_0 是湍流的内尺度)，由于不同温度的流体质点的纯机械混合，导致温度的均匀化. 另一方面，在尺度 $\lambda \sim \lambda_0$ 的区域中，相当大的实际温度梯度却是依赖于耗散性的导热而使其均匀化.

导热产生的耗散(熵增加)由量 $\chi(\nabla T)^2/T^2$ 来确定［见式(49.6)］. 假定温度的湍流涨落比较小，我们可以用一常数(平均温度的平方)来代替分母中的 T^2. 根据 § 32 中所述的方法(见该节第一条脚注)，写出

$$\chi_{湍}(T_\lambda/\lambda)^2 = 常数.$$

将 $\chi_{湍}\lambda \sim \nu_{湍}\lambda \sim \lambda v_\lambda$, $v_\lambda \sim (\epsilon\lambda)^{1/2}$ 代入［见式(32.1)］，求得所需的关系式为

$$T_\lambda \sim \lambda^{1/3}.$$

因此当 $\lambda \gg \lambda_0$ 时，温度的涨落像速度的涨落一样，是正比于距离的立方根. 但是在距离 $\lambda \ll \lambda_0$ 时，根据和速度同样的分析，温度差 T_λ 只正比于 λ.

问题 4. 在非均匀加热的湍流流动中，试导出局部关联函数

$$B_{TT} = \overline{(T_2 - T_1)^2}, \quad B_{iTT} = \overline{(v_{2i} - v_{1i})(T_2 - T_1)^2}$$

之间的关系(雅格龙, A. M. Яглом, 1949).

解: 本题的计算与推导公式(33.18)类似. 根据方程组

$$\frac{\partial T}{\partial t} + v_i \frac{\partial T}{\partial x_i} = \chi \triangle T, \qquad \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0,$$

可求得

$$\frac{\partial}{\partial t}(\overline{T_1 T_2}) = -2\frac{\partial}{\partial x_{1i}}(\overline{v_{1i} T_1 T_2}) + 2\chi \triangle_1 (\overline{T_1 T_2}).$$

在左边令 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$，同时在右边利用流动的均匀性和各向同性，我们用关联函数来表示平均值，即有

$$\frac{\partial}{\partial t}\overline{T^2} = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_{1i}} B_{iTT} - \chi \triangle_1 B_{TT}.$$

---

① 由于有不等式 $\delta' \ll \delta$，在沿温度边界层的厚度方向对方程(54.1)积分时，只需取流体速度分量对 y 的幂级数展开中的第一项. 这样一来，在不同的特殊情形下. 这个公式中常数的计算就变得容易了. 在各种的特殊情形下对流扩散的计算可查阅: В. Г. Левич, *Физико-химическая Гидродинамика*, ИЗД. ХИЭСССР, 1952.

写出 $B_{iTT}=n_iB_{rTT}$，并将其变成对 r 的导数以后再对 r 积分，则得出所需的关系式为

$$B_{rTT}-2\chi dB_{TT}/dr=-\frac{4}{9}r\phi,$$

其中

$$\phi\equiv-\partial(\overline{T'^2})/\partial t=-\partial\overline{(T-\overline{T})^2}/\partial t.$$

利用问题 3 的结果，于是求得当 $r\gg\lambda_0$ 时，$B_{rTT}\cong\frac{4}{9}r\phi$，而当 $r\ll\lambda_0$ 时，则有 $B_{TT}\cong r^2\phi/9\chi$。

§55. 运动流体中物体的加热

浸入静止流体中的温度计所指示的温度等于流体的温度. 但是如果流体是运动的，则温度计所指示的温度要稍高于流体的温度. 其原因是内摩擦加热了停滞在温度计表面上的流体.

一般性的问题可以这样提出：在运动流体中浸入一任意形状的物体，经过足够长的时间以后达到了热平衡，现在需要确定出存在于物体与流体之间的温度差.

这个问题的解由方程(50.2)给出，但是，现在不能像我们对方程(53.1)所做的那样，略去其中包含粘性系数的项，因为正是这些项反映出这里所要讨论的效应. 于是对于定常状态的情形，我们有

$$\boldsymbol{v}\cdot\nabla T=\chi\triangle T+\frac{\nu}{2c_p}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)^2. \tag{55.1}$$

这里还必须补充流体本身的运动方程组，同时严格地说，还要加上物体内的导热方程. 在物体导热系数足够小的极限情况下，可以略去物体内的导热，而假定物体表面上任何一点的温度就等于该点流体的温度，而流体的温度则通过在边界条件 $\partial T/\partial n=0$ （即没有热通量通过物体表面的条件）下解方程(55.1) 求得. 在相反的极限情况下，即物体如有足够大的导热系数，则我们就可以利用物

体表面上各点温度相同的近似条件．此时整个表面上的$\partial T/\partial n$一般并不为零，只是要求通过物体表面的总热通量（即$\partial T/\partial n$在整个表面上的积分）必须为零．在这两种极限情况下，物体的导热系数都不显含在问题的解中．在下面的讨论中，我们总是假定其中必有一种极限条件成立①．

方程(55.1)和(55.3)包含常数参数χ、ν和c_p，而方程的解中还包含物体的线度l和来流速度U．（现在温度差$T_1—T_0$不是一个任意参数，而是它本身必须通过解该方程组来确定.）从这些参数可以组成两个独立的无量纲量，我们取它们为R和P．于是可以推断，所求的温度差T_1-T_0等于某个具有温度量纲的量（我们取其为U^2/c_p）乘上一个R和P的函数，即

$$T_1-T_0=(U^2/c_p)f(R,P). \qquad (55.2)$$

当雷诺数非常小时，即当速度U足够小时，这个函数的形式很容易确定．在这种情形下，方程（55.1）中的$\boldsymbol{v}\cdot\nabla T$项远小于$\chi\triangle T$，所以该方程变成

$$\chi\triangle T=-\frac{\nu}{2c_p}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)^2. \qquad (55.3)$$

在l量级的距离上，温度和速度将发生显著的变化．因此对方程两边作量级估计，可得出

$$\chi(T_1-T_0)/l^2\sim\nu U^2/c_pl^2,$$

或

$$T_1-T_0\sim\nu U^2/\chi c_p.$$

于是可以断定，当R很小时有

$$T_1-T_0=常数\times PU^2/c_p, \qquad (55.4)$$

---

① 对于加热圆盘在粘性流体中的旋转问题，基别里(И. А. Кибель)已经得出了精确解，类似于§23中在常温情形下的解，见И. А. Кибель, *Прикл.* Матем. и Мех. 11, 611, 1947.

其中数值常数依赖于物体的形状. 应该指出, 温度差正比于速度 U 的平方.

在相反的 R 很大的极限情形下, 这时速度和温度只在很薄的边界层中变化, 我们可以得出关于式(55.2)中函数 $f(P,R)$ 形式的若干一般性结论. 设 δ 和 δ' 分别是速度和温度变化层的厚度, δ 和 δ' 相差一个依赖于 P 的倍数. 由于流体的粘性, 边界层单位面积上在单位时间内放出的热量等于 $\frac{1}{2}\nu\rho\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)^2$ 在边界层厚度上的积分(见式(16.3)). 这个积分的量级为

$$\nu\rho(U^2/\delta^2)\delta=\nu\rho U^2/\delta.$$

当然, 同样的热量必定耗散在物体上, 于是这一热量等于热通量

$$q=-\kappa\partial T/\partial n\sim\chi c_p\rho(T_1-T_0)/\delta'.$$

比较这两个表达式, 我们求得

$$T_1-T_0=(U^2/c_p)f(P). \tag{55.5}$$

因此, 在这种情形下, 函数 f 与 R 无关, 但是它对 P 的依赖关系仍然还没有确定.

问　　题

问题1. 在圆截面的管道中流体作泊肃叶流动, 设管壁上保持着恒温 T_0, 试求流体中的温度分布.

解: 在柱坐标中(z 轴沿管道轴线), 我们有

$$v_z=v=2v_m[1-(r/R)^2],$$

其中 v_m 是平均流速. 代入方程(55.3)得

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right)=-\frac{16v_m^2}{R^4}\frac{\nu}{\chi c_p}r^2.$$

考虑到温度在 $r=0$ 时应有限, 在 $r=R$ 时等于 T_0, 则得解为

$$T-T_0=v_m^2\frac{P}{c_p}\left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^4\right].$$

问题 2. 设流体绕固体球流动的雷诺数很小, 并且假定球的导热系数很

大，试求球和流体之间的温度差.

解：我们选用球坐标 r, θ, ϕ，其原点位于球心，极轴沿来流的速度方向. 借助公式(15.17)和(20.9)计算出张量 $\partial v_i/\partial x_k+\partial v_k/\partial x_i$ 的分量，得方程(55.3)在球坐标中的形式为

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial T}{\partial\theta}\right)$$
$$=-A(R/r)^4[\cos^2\theta\{3-6(R/r)^2+2(R/r)^4\}+(R/r)^4],$$

其中 $A=9u^2P/4c_p$. 我们求形式为 $T=f(r)\cos^2\theta+g(r)$ 的 $T(r,\theta)$，在分离出依赖于 θ 的部分之后，得出关于 f 和 g 的两个方程：

$$r^2f''+2rf'-6f=-A[3(R/r)^2-6(R/r)^4+2(R/r)^6],$$
$$r^2g''+2rg'+2f=-A(R/r)^6.$$

从第一个方程得出

$$f=A\left[\frac{3}{4}(R/r)^2+(R/r)^4-\frac{1}{12}(R/r)^6\right]+$$
$$+c_1(R/r)^3;$$

因为常数 $\times r^2$ 形式的项在无穷远处不为零，所以将它略去了. 再由第二个方程给出

$$g=-\frac{1}{2}A\left[\frac{3}{2}(R/r)^2+\frac{1}{3}(R/r)^4+\frac{1}{18}(R/r)^6\right]$$
$$-\frac{1}{3}c_1(R/r)^3+c_2R/r+c_3.$$

常数 c_1、c_2、c_3 根据下列条件来确定，即

当 $r=R$ 时，　　$T=$ 常数和 $\int(\partial T/\partial r)r^2\sin\theta d\theta=0$；

当 $r=\infty$ 时，　　$T=T_0$.

上述第一个条件等价于

当 $r=R$ 时，　　$f(R)=0$ 和 $g'(R)+\frac{1}{3}f'(R)=0$.

因此 $c_1=-5A/3$, $c_2=2A/3$, $c_3=T_0$. 并求得 $T_1=T(R)$ 和 T_0 之间的温度差为

$$T_1-T_0=5u^2P/8c_p.$$

可以指出，所得到的温度分布实际上满足条件：

当 $r=R$ 时，　　$\partial T/\partial r=0$，即 $f'(R)=g'(R)=0$.

所以它也是导热系数很小的球的同一问题的解.

§ 56. 自由对流

在 § 3 中我们已经知道，如果流体在重力场中处于力学平衡，则其温度分布只能取决于高度 z，即 $T=T(z)$. 如果温度分布不满足这个条件，它还是其他坐标的函数，那么在流体中的力学平衡是不可能的. 不仅如此，即使有 $T=T(z)$，如果沿铅垂线的温度梯度方向向下，其大小超过一定的数值(§4)，则力学平衡仍旧是不可能的.

力学平衡的破坏会引起流体内部环流的出现，它促使流体混合并进而使各点的温度相同. 重力场中流体的这种运动称为**自由对流**.

现在来导出描写这种对流的方程组. 我们假定流体是不可压缩的，也就是说，在整个流体中假定压力的变化足够小，以致由压力变化所引起的密度变化可以忽略不计. 例如在大气中，其压力随高度而变化，上述假定的含义就是我们不去研究很高的气柱. 因为在这样的气柱中，密度在整个气柱高度上有显著的变化. 由流体的非均匀加热引起的密度变化，当然是不能忽略的，而且正是由于它才产生了引起对流的力.

我们把可变的温度 $T(x, y, z, t)$ 写成 $T=T_0+T'$ 的形式，其中 T_0 是某个不变的平均温度，它作为计算改变量 T' 的起点. 我们将假定 T' 远小于 T_0.

将流体的密度也写成 $\rho=\rho_0+\rho'$ 的形式，其中 ρ_0 是常数. 因为温度的改变量 T' 很小，所以由它引起的密度的改变量也很小，于是可以写出

$$\rho'=(\partial\rho_0/\partial T)_p T'=-\rho_0\beta T'. \qquad (56.1)$$

这里的 $\beta=-(1/\rho)\partial\rho/\partial T$ 是流体的热膨胀系数.

在压力 $p=p_0+p'$ 中，p_0 不是常数，它是当温度和密度为常数

并且分别为 T_0 和 ρ_0 时，对应于力学平衡状态的压力. 它按流体静力学方程

$$p_0=\rho_0\mathbf{g}\cdot\boldsymbol{r}+\text{常数} \tag{56.2}$$

随高度而变化.

我们从变换纳维-斯托克斯方程开始. 在重力场中，纳维-斯托克斯方程的形式为

$$\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}=-(1/\rho)\nabla p+\nu\triangle\boldsymbol{v}+\boldsymbol{g};$$

这是在方程(15.7) 的右边加上了单位质量流体的重力 $\boldsymbol{g}$ 得到的. 现在将 $p=p_0+p'$, $\rho=\rho_0+\rho'$ 代入，并保留到一阶小量，可得

$$\frac{\nabla p}{\rho}=\frac{\nabla p_0}{\rho_0}+\frac{\nabla p'}{\rho_0}-\frac{\nabla p_0}{\rho_0^2}\rho',$$

或者再将式(56.1)和式(56.2)代入得

$$\frac{\nabla p}{\rho}=\boldsymbol{g}+\frac{\nabla p'}{\rho_0}+\boldsymbol{g}T'\beta.$$

将上式代入纳维-斯托克斯方程，最终得到

$$\partial\boldsymbol{v}/\partial t+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}=-(1/\rho)\nabla p'+\nu\triangle\boldsymbol{v}-\beta T'\boldsymbol{g}, \tag{56.3}$$

其中已将 ρ_0 的下标去掉了. 可以证明，在导热方程(50.2)中，自由对流时的粘性项远小于其它各项，因此可以忽略不计. 于是得到

$$\partial T'/\partial t+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)T'=\chi\triangle T'. \tag{56.4}$$

方程(56.3)和(56.4)加上连续方程 $\nabla\cdot\boldsymbol{v}=0$，组成了描述自由对流的完备方程组.

对于定常流动，对流方程组变成

$$(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}=-(1/\rho)\nabla p'-\beta T'\boldsymbol{g}+\nu\triangle\boldsymbol{v}, \tag{56.5}$$

$$(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)T'=\chi\triangle T', \tag{56.6}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{v}=0. \tag{56.7}$$

关于未知函数 $\boldsymbol{v}$、p'/ρ 和 T' 的这五个方程包含着三个参数 ν，χ

和 βg. 此外，方程组的解还一定包含特征长度 l 和固体与远处流体之间的温度差 T_1-T_0. 由于没有外力引起的流动，而整个流体的运动是由非均匀加热引起的，所以这里没有特征速度.

因此，在重力场中的定常自由对流由五个参数表征，它们具有下列的量纲:

$$[\chi]=[\nu]=\text{厘米}^2/\text{秒}, [T_1-T_0]=\text{度},$$

$$[l]=\text{厘米}, \ [\beta g]=\text{厘米}/\text{秒}^2\cdot\text{度}.$$

由这些参数可以构成两个独立的无量纲量，我们取其为普朗特数

$$P=\nu/\chi$$

和格拉肖夫(Grashof)数

$$G=\beta g l^3(T_1-T_0)/\nu^2. \tag{56.8}$$

所以，自由对流的相似律为

$$\boldsymbol{v}=(\nu/l)\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}/l, G), \ T=(T_1-T_0)f(\boldsymbol{r}/l, P, G). \tag{56.9}$$

即如果两个流动的普朗特数和格拉肖夫数相同，则这两个流动相似.

由于重力引起的对流传热还由努塞尔数表征，努塞尔数现在只是 P 和 G 的函数:

$$N=f(P, G). \tag{56.10}$$

格拉肖夫数的值是对流的一个重要特征量. 当 G 足够小时，在流体的传热中自由对流是不重要的，此时传热主要是由通常的导热所引起的.

对流流动可以是层流流动也可以是湍流流动. 自由对流没有雷诺数(因为它没有特征速度参数)，而由格拉肖夫数来决定湍流的开始，即当 G 很大时，就变成湍流对流.

作为一个非常奇特的对流情形，要算是这样的流动，它发生在两块温度不同的无限大的水平平板之间的流体中，下平板的温度(T_2)大于上平板的温度(T_1). 如果温度差 T_2-T_1 很小，则流体仍

旧处于静止，并且只有纯粹的导热，则流体的温度和密度只是铅垂坐标的函数，密度向上增加．但是，如果温度差 T_2-T_1 超过某个临界值(它取决于平板之间的距离 l)，上述状态就变成不稳定的了，于是出现了定常对流．在理论上可以确定出不稳定性开始的条件(见问题5)．温度差的临界值作为一个因子出现在以下的乘积中，

$$GP=\beta g l^3(T_2-T_1)/\nu\chi. \tag{56.11}$$

在两个恒温固体平板之间的流体层中，如果 $GP>1710$，则对流必定发生．如果上表面是自由面，但是仍旧维持恒温，则 $GP>1100$ 时就出现对流①．

这里出现的对流是有它自己的特点的．因为流体在水平面上是无界的，显然流动在该平面内必须是周期性的．换句话说，两个边界平面之间的空间必然被分割成许许多多的正棱柱体，在每一个正棱柱体中，流体以同样的方式运动．这些正棱柱体的水平截面在该水平面内组成网格．在理论上要确定这些网格的性质是非常困难的，但是实验结果似乎表明存在着六边形的图案．因此，对流由一个个六角形棱柱体的单元组成，在柱体中间的流体向上运动，而在边上的流体向下运动，或者两者的流向正好反过来．

当 G 的值非常大时，定常对流又变成不稳定的，在 $G\sim 50,000$ 时，湍流开始建立．

作为不稳定性的另一个类似情况，应提到在铅垂圆柱形管道中对流的例子，其中沿管轴保持有恒定的温度梯度．这里也有一个 GP 乘积的临界值，超过它，流体的静止状态将是不稳定的，见《问题 6》．

---

① 如果 l 足够大，这些条件(对于给定的温度差 T_2-T_1)总是满足的．为了避免误解，应该说明我们在这里指的是这样的 l 值，在这个距离上由重力作用引起的流体密度变化是不重要的．因此，上述判据不能用于很高的气柱．如果遇到这种情形，我们应当采用§4导出的判据．从那里可知，对于任何高度的气柱，如果温度梯度足够小，对流不一定出现．

问　　题

问题 1. 设在铅垂平板上出现自由对流，假定只在紧贴于平板表面的薄边界层中速度和温度差 $T'=T-T_0$（其中 T_0 是无穷远处流体的温度）才明显地异于零．试确定自由对流的努塞尔数[波尔豪森(K. Pohlhaussen)]．

解：我们将坐标原点取在平板的下缘，x 轴沿铅垂方向，y 轴垂直于平板．因为边界层中压力沿 y 轴不变（参阅 § 39），所以各处压力等于流体静压力 $p_0(x)$，即 $p'=0$．按照通常的边界层理论的精度，方程(56.5)—(56.7)变为

$$v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}=\nu\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}+\beta g(T-T_0), \tag{1}$$

$$v_x\frac{\partial T}{\partial x}+v_y\frac{\partial T}{\partial y}=\chi\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}=0, \tag{3}$$

其边界条件为

在 $y=0$ 时，　　$v_x=v_y=0$，$T=T_1$（T_1 是平板温度）；

在 $y=\infty$ 时，　　$v_x=0$，$T=T_0$．

通过引入自变量

$$\xi=Cy/x^{1/4}, \tag{4}$$

其中

$$C=[\beta g(T_1-T_0)/4\nu^2]^{1/4},$$

可将这些方程化为常微分方程．再令

$$\begin{aligned} v_x&=4\nu C^2\sqrt{x}\,\phi'(\xi),\\ T-T_0&=(T_1-T_0)\theta(\xi). \end{aligned} \tag{5}$$

则方程(3)给出

$$v_y=\nu Cx^{-1/4}(\xi\phi'-3\phi),$$

而方程(1)和(2)给出 ϕ 和 θ 的方程：

$$\left.\begin{aligned} &\phi'''+3\phi\phi''-2\phi'^2+\theta=0,\\ &\theta''+3P\phi\theta'=0, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

其边界条件为：

$$\phi(0)=\phi'(0)=0,\quad \theta(0)=1;$$

$$\phi'(\infty)=0,\quad \theta(\infty)=0.$$

由式(4)和式(5)得边界层厚度的量级为

$$\delta\sim x^{1/4}/C.$$

上述方程的解能够成立的条件为$\delta\ll l$(其中 l 是平板的高度), 或$G^{1/4}\gg 1$. 平板单位面积上的总热通量为

$$q=-\frac{1}{l}\int_0^l \kappa\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0}dx=-\frac{4}{3}\kappa\theta'(0,P)C(T_1-T_0)l^{-1/4}.$$

努塞尔数为 $N=f(P)G^{1/4}$, 其中函数 $f(P)$ 通过解方程(6)来定出.

问题 2. 设在重力场作用下, 一个浸没的热气体湍流射流圆滑地弯曲, 试求它的形状(阿勃拉莫维奇 Г. Н. Абрамович, 1938).

解: 设 T' 是射流和周围气体之间温度差的某个平均值 (在射流横截面上平均), u 是射流中气体的某个平均速度, l 是沿射流离开其入射点的距离, 其中 l 假定为远大于射流出口处口径的尺寸. 沿射流热通量不变的条件为

$$Q\sim\rho c_pT'uR^2=\text{常数}.$$

因为湍流射流的半径正比于 l (参阅 § 35), 我们得

$$T'ul^2=\text{常数}\sim Q/\rho c_p; \tag{1}$$

我们要指出, 如果不计重力场的影响, 则 $u\sim 1/l$[见式(35.3)], 并由此从式(1)得出 $T'\sim 1/l$.

通过射流横截面的动量通量矢量正比于 $\rho u^2R^2\boldsymbol{n}\sim gu^2l^2\boldsymbol{n}$, 其中 $\boldsymbol{n}$ 是沿射流的单位矢量. 动量通量矢量的水平分量沿射流不变, 即

$$u^2l^2\cos\theta=\text{常数}, \tag{2}$$

其中 θ 是 $\boldsymbol{n}$ 与水平方向之间的夹角, 而其铅垂分量的变化是作用在射流上的"升力"所引起的. 升力正比于

$$\rho\beta gT'R^2\sim\rho\beta gT'l^2\sim\beta gQ/c_pu.$$

因此我们得

$$d(l^2u^2\sin\theta)/dl\sim\beta gQ/\rho c_pu. \tag{3}$$

其次从式(2)得出

$$d(\mathrm{tg}\theta)/dl=\text{常数}\times l\cos^{\frac{1}{2}}\theta,$$

所以最后得

$$\int_{\theta_0}^{\theta}\frac{d\theta}{\cos^{5/2}\theta}=\text{常数}\times l^2, \tag{4}$$

其中 θ_0 给出射流入射的方向.

特别是，如果 θ 沿射流的变化不大，则式(4)给出

$$\theta-\theta_0=\text{常数}\times l^2.$$

也就是说射流的形状是一条三次抛物线，它对直线的偏离量

$$d=\text{常数}\times l^3.$$

问题 3. 设有一加热气体的湍流射流（具有很大的格拉肖夫数）从固定的热物体上升起，试求射流中速度和温度随高度的变化规律(Я. Б, 泽尔道维奇, 1937).

解： 和上述情形一样，射流的半径正比于离开射流源的距离. 仿照问题 2 中的式(1)，我们得

$$T'uz^2=\text{常数},$$

并且用

$$d(z^2u^2)/dz=\text{常数}$$

来代替式(3)，其中 z 是在物体上方的高度，假定它远大于物体的线度. 进行积分后求得速度

$$u\sim z^{-1/3},$$

以及温度

$$T'\sim z^{-5/3}.$$

问题 4. 其它条件和问题 3 相同，但这里是自由升起的层流对流射流(Я. Б. 泽尔道维奇, 1937).

解： 除了表示热通量不变的关系式之外，即除了

$$T'uR^2=\text{常数},$$

之外还有从方程(56.5)得出的

$$u^2/z\sim\nu u/R^2-\beta gT'.$$

根据这些关系式，我们求得下列半径、速度和温度随高度的变化规律：

$$R\sim\sqrt{z},\quad u=\text{常数},\ T'\sim 1/z.$$

还可以指出，格拉肖夫数

$$G\sim T'R^3\sim\sqrt{z},$$

即 G 随高度的增加而增加. 所以在一定的高度上，射流必定要变成湍流.

问题 5. 设有两块平板，各自保持原给定的温度，其间发生对流过程，试确定开始出现定常对流条件的控制方程(瑞利, 1916).

解： 在具有不变的铅垂温度梯度 $\partial T/\partial z=-A<0$ 的静止流体中，加上一正比于 $e^{-i\omega t}$ 的扰动. 如果有任何一个可能的 ω 值的虚部为正，则流体的

静止状态是不稳定的. 因此,不稳定性的到来取决于是否出现使 ω 的虚部为零的解. 在本问题中,我们讨论由不稳定性引起定常对流出现条件; 因此必须找出 ω 实部也为零的解,也就是要找出与时间无关的解.

在方程 (56.5)—(56.7) 中, 扰动运动的速度 $\boldsymbol{v}$ 以及由它引起的压力改变量均为小量. 将温度写成

$$T' = -Az + \tau,$$

其中扰动量 τ 很小; 假定由恒定的温度梯度引起的压力改变量已包含在 p_0 中. 在略去二阶量以后,我们求得

$$\left.\begin{aligned} \nu\triangle\boldsymbol{v} &= \nabla(p'/\rho) + \beta\tau\boldsymbol{g}, \\ \chi\triangle\tau &= -Av_z, \qquad \nabla\cdot\boldsymbol{v} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

消去 $\boldsymbol{v}$ 和 p'/ρ, 得到 τ 的方程:

$$\triangle^3\tau = \frac{\gamma}{l^4}\left(\frac{\partial^2\tau}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\tau}{\partial y^2}\right), \tag{2}$$

其中 $\gamma = l^4\beta gA/\nu\chi = GP$, 而 l 是两平板之间的距离.

在固壁上,方程(1)的边界条件为

$$\tau = 0, \qquad v_z = 0, \qquad \partial v_z/\partial z = 0.$$

因为对于所有的 x 和 y 都必须有 $v_x = v_y = 0$, 所以边界条件中的最后一个条件是由连续方程得来的. 根据方程(1)中的第二个方程, v_z 的条件可以由 τ 的高阶导数的条件来代替,即由 $\partial^2\tau/\partial z^2$ 来替.

我们寻找具有 $e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}f(z)$ 形式的 τ, 其中 $\boldsymbol{k}$ 是 xy 平面内的矢量, 由此得到 $f(z)$ 的方程为

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} - k^2\right)^3 f + \frac{\gamma k^2}{l^4} f = 0.$$

这个方程的通解是函数 $\operatorname{ch}(\mu z/l)$ 和 $\operatorname{sh}(\mu z/l)$ 的线性组合,其中

$$\mu^2 = k^2 l^2 - \gamma^{1/3}(kl)^{2/3}\sqrt[3]{1},$$

这里的 $\sqrt[3]{1}$ 具有三个不同的值. 通解的系数由边界条件决定,由此导出一个代数方程组. 然后由相容性条件决定出函数 $kl(\gamma)$. 其反函数 $\gamma = \gamma(kl)$ 对某个 kl 值有最小值. 对应的 $\gamma = GP$ 决定了发生不稳定性所要求的判据,同时 k 值决定了所得运动在 xy 平面内的周期性,但不是对称的[①].

问题 6. 设铅垂圆柱形管道中的流体处于平衡, 并且沿管道保持有不变

---

① 详尽的计算见 A. Pellew and R. V. Southwell, *Proc. Roy. Soc.*, A176, 312, 1940.

的温度梯度．试确定发生定常对流的临界条件（奥斯特罗莫夫 Г. А. Остромов, 1946）．

解：我们来求问题 5 中方程组(1)的这样的解，其中对流速度处处平行于管轴（即 z 轴），流动图案沿管轴不变，即 $v_z=v$、τ 和 $\partial p'/\partial z$ 只决定于坐标 x 和 y．此时方程组变成

$$\left.\begin{aligned}&\partial p'/\partial x=0, \quad \partial p'/\partial y=0,\\ &\nu\triangle_2 v=-\beta g\tau+(1/\rho)\,\partial p'/\partial z,\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

$$\chi\triangle_2\tau=-Av,$$

其中

$$\triangle_2\equiv\partial^2/\partial x^2+\partial^2/\partial y^2.$$

头两个方程表明

$$\partial p'/\partial z=\text{常数},$$

再在其余两个方程中消去 τ，则得

$$\triangle_2^2 v=\gamma v/R^4,$$

在这里再一次令

$$\gamma=AR^4\beta g/\chi\nu=GP,$$

R 是管道的半径．在管壁上，必须有 $v=0$ 以及热通量连续．此外，通过管道横截面的总质量通量必须为零．

方程(1)有形式为

$$J_n(kr)\cos n\phi, \qquad I_n(kr)\cos n\phi$$

的解，其中 J_n 和 I_n 分别是实宗量和虚宗量的贝塞尔函数，r 和 ϕ 是管道横截面上的极坐标，而 $kR=\gamma^{1/4}$．对流的起始点对应于 γ 取最小值的解．可以发现，它就是 $n=1$ 的解：

$$v=v_0\cos\phi[J_1(kr)I_1(kR)-I_1(kr)J_1(kR)].$$

$$\tau=v_0(\nu k^2/\beta g)\cos\phi[J_1(kr)I_1(kR)+I_1(kr)J_1(kR)].$$

上述解中并不出现压力梯度 $\partial p'/\partial z$．当 $r=R$ 时，条件 $v=0$ 总是满足的，而且通过管道横截面的总质量通量为零．在管壁绝热的极限情形下，我们还必须有如下的条件：

$$\text{当 } r=R \text{ 时}, \qquad \partial\tau/\partial r=0,$$

或

$$\frac{J_0(kR)}{J_1(kR)}+\frac{I_0(kR)}{I_1(kR)}=\frac{2}{kR}.$$

这个方程的最小根给出所需的临界值 $\gamma=(kR)^4=67.4$. 在管壁有无限大的导热系数的相反的极限情形下，则必须有

$$\text{在 } r=R \text{ 时,} \qquad \tau=0,$$

这时 $J_1(kR)=0$，由此得出临界值 $\gamma=215.8$[1]。

---

① 更详细的讨论见 Г. А. Остроумов, *Свободная конвекция в условиях внутрен ней задачи*, Гостехиздат, 1952.

第六章　扩　　散

§57. 混合流体的流体动力学方程

前面的所有论述都始终假设流体是完全均匀的．如果我们要研究混合流体，且它在不同位置上的组成是不一样的，那末流体动力学方程就要作相当大的改变．

在这里，我们只讨论两个成分的混合流体．混合流体的组成由浓度 c 描述，c 定义为给定的体元内一种成分的质量与该体元流体总质量之比．

流体中的浓度分布一般要随时间而发生变化．这种变化有两个方面．第一，当流体有宏观运动时，任何给定的一小部分流体都作为一个整体在移动；其组成保持不变．这就导致流体的纯机械混合，虽然每个移动部分的组成不变，但在空间任一点上，流体浓度在随时间变化．如果忽略可能发生的导热和内摩擦过程，那末这种浓度变化是热力学可逆的过程，不致引起能量耗散．

第二，由于各成分的分子从流体的一部分转移到另一部分，可使混合流体的组成发生改变．这种由于直接改变每一小部分流体的组成而使浓度均匀化的过程称为**扩散**．扩散是一种不可逆过程，并且与导热和粘性一样，是混合流体中能量耗散的原因之一．

我们用 ρ 表示流体的总密度．关于流体总质量的连续方程，和以前一样，为

$$\partial\rho/\partial t+\nabla\cdot(\rho v)=0. \qquad (57.1)$$

这个方程表示，任何体积中流体的总质量只能由流体流入或流出这个体积而引起改变．应强调指出：严格说来，对于混合流体，我

们必须对速度概念本身重新定义. 写出(57.1) 形式的连续方程, 和以前一样, 我们把速度定义为单位质量流体的总动量.

纳维-斯托克斯方程(15.5)也不变. 现在, 我们将对混合流体导出其余的流体动力学方程.

在没有扩散的情况下, 当任何给定的流体元移动时, 其组成将保持不变. 这意味着全导数 dc/dt 应为零, 就是说方程式

$$dc/dt = \partial c/\partial t + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)c = 0$$

应成立. 利用(57.1), 这个方程可写成

$$\partial(\rho c)/\partial t + \nabla\cdot(\rho c\boldsymbol{v}) = 0,$$

即写成混合流体中某一种成分的连续方程(ρc 是单位体积中该成分的质量). 写成积分形式为

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\rho c dV = -\oint\rho c\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{f},$$

这表明; 任何体积内这一成分质量的变化率等于因流体运动穿过该体积界面所输运的质量.

对于有扩散的情形, 除了所讨论的成分随流体一起运动的通量 $\rho c\boldsymbol{v}$ 以外, 即使流体作为整体是处于静止状态, 也还有另一个通量, 该通量引起这一成分的传递. 令 $\boldsymbol{i}$ 是这一扩散通量的密度, 即单位时间内由于扩散而穿过单位面积所输运的这一成分的质量①. 因而在任一体积内, 这一成分质量的变化率为

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\rho c dV = -\oint\rho c\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{f} - \oint\boldsymbol{i}\cdot d\boldsymbol{f}$$

或写成微分形式

$$\frac{\partial(\rho c)}{\partial t} = -\nabla\cdot(\rho c\boldsymbol{v}) - \nabla\cdot\boldsymbol{i}. \tag{57.2}$$

利用(57.1), 可将某一种成分的"连续方程"写成

---

① 两种成分的通量密度之和应为 $\rho\boldsymbol{v}$. 若一种成分的通量密度是 $\rho c\boldsymbol{v}+\boldsymbol{i}$, 则另一种成分的通量密度就是 $\rho(1-c)\boldsymbol{v}-\boldsymbol{i}$.

$$\rho\left(\frac{\partial c}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\nabla c\right)=-\nabla\cdot\boldsymbol{i}. \tag{57.3}$$

为了导出另一方程，我们重复§ 49 中所作的讨论；但要记住，现在流体的热力学量也是浓度的函数．在通过运动方程计算导数(§ 49 中)

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho v^2+\rho\epsilon\right)$$

时，必须对 $\rho\partial\epsilon/\partial t$ 和 $-\boldsymbol{v}\cdot\nabla p$ 两项进行变换．现在需要修改这个变换，因为现在内能和焓的热力学恒等式包含一个浓度 c 的微分的附加项：

$$d\epsilon=Tds+(p/\rho^2)d\rho+\mu dc,$$

$$dw=Tds+(1/\rho)dp+\mu dc,$$

这里 μ 是适当定义的混合流体的化学势①．因此在导数 $\rho\partial\epsilon/\partial t$ 中出现一个附加项 $\rho\mu\partial c/\partial t$．把上面的第二个热力学关系写成

$$dp=\rho dw-\rho Tds-\rho\mu dc$$

我们看出，项 $-\boldsymbol{v}\cdot\nabla p$ 将含有一个附加项 $\rho\mu\boldsymbol{v}\cdot\nabla c$。

因此，我们必须把

$$\rho\mu\left(\frac{\partial c}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\nabla c\right)$$

加到表达式(49.3)上去．由方程(57.3)，上式可写成

---

① 由热力学知道，对两种物质的混合流体而言，热力学恒等式为

$$d\epsilon=Tds-pdV+\mu_1dn_1+\mu_2dn_2,$$

式中 n_1、n_2 是 1 克混合流体中两种物质的粒子数，μ_1，μ_2 是两种物质的化学势．数值 n_1 和 n_2 满足关系式 $n_1m_1+n_2m_2=1$，这里 m_1，m_2 是这两种粒子的质量．若引进浓度 $c=n_1m_1$ 作为变量，我们有

$$d\epsilon=Tds-pdV+(\mu_1/m_1-\mu_2/m_2)dc,$$

把此式与正文中所给的式子比较一下，可知化学势 μ 与 μ_1，μ_2 有以下关系：

$$\mu=\frac{\mu_1}{m_1}-\frac{\mu_2}{m_2}$$

$$-\mu\nabla\cdot\boldsymbol{i}$$

结果得出

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho v^2+\rho\epsilon\right)=-\nabla\cdot\left[\rho\boldsymbol{v}\left(\frac{1}{2}v^2+w\right)-\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\sigma}'+\boldsymbol{q}\right]+$$

$$+\rho T\left(\frac{\partial s}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\nabla s\right)-\sigma'_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\nabla\cdot\boldsymbol{q}-\mu\nabla\cdot\boldsymbol{i} \qquad (57.4)$$

上式中已用热通量 $\boldsymbol{q}$ 代替了 $-\kappa\nabla T$, $\boldsymbol{q}$ 不仅可以依赖于温度梯度，而且还可以依赖于浓度梯度(见下一节). 上式右边后两项的和可写成

$$\nabla\cdot\boldsymbol{q}-\mu\nabla\cdot\boldsymbol{i}=\nabla\cdot(\boldsymbol{q}-\mu\boldsymbol{i})+\boldsymbol{i}\cdot\nabla\mu.$$

根据 $\boldsymbol{q}$ 的定义, (57.4)中散度算子下的运算量

$$\rho\boldsymbol{v}\left(\frac{1}{2}v^2+w\right)-\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\sigma}'+\boldsymbol{q}$$

是流体中总的能量通量. 其第一项是可逆的能量通量，仅仅是由流体作为整体运动所产生的; 而后二项之和

$$-\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\sigma}'+\boldsymbol{q}$$

是不可逆的通量. 当不存在宏观运动时, 粘性通量 $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\sigma}'$ 是零, 而热通量就是 $\boldsymbol{q}$.

能量守恒方程为

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho v^2+\rho\epsilon\right)=-\nabla\cdot\left[\rho\boldsymbol{v}\left(\frac{1}{2}v^2+w\right)-\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\sigma}'+\boldsymbol{q}\right]. \quad (57.5)$$

从(57.4)减去上式, 即得所要求的方程

$$\rho T\left(\frac{\partial s}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\nabla s\right)=\sigma'_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k}-\nabla\cdot(\boldsymbol{q}-\mu\boldsymbol{i})-\boldsymbol{i}\cdot\nabla\mu, \qquad (57.6)$$

此式是(49.4)的推广.

于是我们得到了混合流体的流体动力学完备方程组. 此方程组中方程式的数目比单一流体情形多一个，因为增加了一个未知函数, 即浓度. 这些方程是连续方程(57.1), 纳维-斯托克斯方程, 一种成分的"连续方程"(57.2)以及确定熵变化的方程(57.6). 应

注意，方程(57.2)和 (57.6) 实际上只确定了相应的流体动力学方程的形式，因为这两个方程中含有未定的通量 $\boldsymbol{i}$ 和 $\boldsymbol{q}$. 只有当 $\boldsymbol{i}$ 和 $\boldsymbol{q}$ 用浓度梯度和温度梯度的表达式代替时，这两个方程式才是确定的. $\boldsymbol{i}$ 和 $\boldsymbol{q}$ 的表达式将在 § 58 中给出.

关于流体总熵的变化率，与 § 49 中的计算完全类似，只是用(57.6)代替(49.4)，结果是

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \rho s dV = -\int\frac{(\boldsymbol{q}-\mu\boldsymbol{i})\cdot\nabla T}{T^2}dV - \int\frac{\boldsymbol{i}\cdot\nabla\mu}{T}dV + \cdots \qquad (57.7)$$

为了写得简短一点，式中省略了粘性项.

§ 58. 传质系数和热扩散系数

扩散通量 $\boldsymbol{i}$ 和热通量 $\boldsymbol{q}$ 是由于流体中存在浓度梯度和温度梯度而产生的. 但不应认为 $\boldsymbol{i}$ 只依赖于浓度梯度，而 $\boldsymbol{q}$ 只依赖于温度梯度. 相反，这里每一通量一般都同时依赖于这两个梯度.

若浓度梯度和温度梯度不大，我们可以假设 $\boldsymbol{i}$ 和 $\boldsymbol{q}$ 是 $\nabla\mu$ 和 ∇T 的线性函数①. 因此，我们把 $\boldsymbol{i}$ 和 $\boldsymbol{q}$ 写成

$$\boldsymbol{i} = -\alpha\nabla\mu - \beta\nabla T,$$

$$\boldsymbol{q} = -\delta\nabla\mu - \gamma\nabla T + \mu\boldsymbol{i}.$$

系数 β 和 δ 之间有一个简单的关系，这是**动力系数对称原理**的结论. 此对称原理如下所述②.

我们来研究某一个封闭系统，令 $x_1, x_2\cdots$ 是表征该系统状态的某些量. 这些量的平衡值可由下述事实决定：在统计平衡情况下，整个系统的熵 S 必定是最大值，即对所有的 a，我们有 $X_a = 0$，这

---

① 通量 $\boldsymbol{q}$ 和 $\boldsymbol{i}$ 与压力梯度无关(对于给定的 $\nabla\mu$ 和 ∇T)，其理由与 § 49 中关于 $\boldsymbol{q}$ 所述理由相同.

② 见 *Statistical Physics*, § 119, Pergamon Press, London 1958.（Л. Д. 朗道、E. M. 栗弗席茨著，杨训恺等译，统计物理学，人民教育出版社，1964.）

里 X_a 表示下列导数

$$X_a=-\partial S/\partial x_a. \tag{58.1}$$

我们假设该系统处于接近平衡的状态. 这意味着所有的 x_a 与其平衡值相差很小, 因此 X_a 很小. 这时将出现使系统趋于平衡的某些过程. 量 x_a 是时间的函数, 而 x_a 的变化率由时间导数 $\dot{x}_a$ 给出. 我们把 $\dot{x}_a$ 表成 X_a 的函数, 并把这些函数展成级数. 只考虑一阶项, 我们有

$$\dot{x}_a=-\sum_b \gamma_{ab}X_b. \tag{58.2}$$

动力系数对称原理说明 γ_{ab}(称为**动力系数**)关于下标 a 和 b 是对称的, 即

$$\gamma_{ab}=\gamma_{ba}. \tag{58.3}$$

熵 S 的变化率是

$$S=-\Sigma X_a\dot{x}_a. \tag{58.4}$$

现在设在系统不同的点上 x_a 本身不相同, 即每个体积元有它自己的 x_a 值. 也就是说, 我们假设 x_a 是坐标的函数. 则在 $\dot{S}$ 的表达式中, 除了对 a 求和以外, 我们还必须在整个系统的体积上积分

$$\dot{S}=-\int\sum_a X_a\dot{x}_a dV. \tag{58.4a}$$

任何给定点上 $\dot{x}_a$ 的值通常确实只依赖于该点 X_a 的值. 这样, 我们可以对系统中的每一点, 写出 $\dot{x}_a$ 与 X_a 的关系, 并得到和以前同样的公式①.

在目前所研究的问题中, 我们把矢量 $\boldsymbol{i}$ 和 $\boldsymbol{q}-\mu\boldsymbol{i}$ 的分量取作 x_a. 于是比较(57.7)和(58.4a)可知, X_a 分别为矢量 $(1/T)\nabla\mu$ 和

---

① 严格说来, 为了把对离散的物理量的集合所求得的关系式用于连续分布情形, 我们应当把积分(58.4a)写成求和的形式, 即在物体上许多小区域(但仍是有限的) ΔV 求和(见 § 132); 因而系数 γ_{ab} 的这个定义也涉及 ΔV. 但在目前情况下, 这样处理是不必要的, 因为我们只利用动力系数的对称性, 而不是用动力系数实际的数值.

$(1/T^2)\nabla T$ 的分量. 动力系数 γ_{ab} 是下列方程中这些矢量的系数.

$$\boldsymbol{i}=-\alpha T\left(\frac{\nabla\mu}{T}\right)-\beta T^2\left(\frac{\nabla T}{T^2}\right),$$

$$\boldsymbol{q}-\mu\boldsymbol{i}=-\delta T\left(\frac{\nabla\mu}{T}\right)-\gamma T^2\left(\frac{\nabla T}{T^2}\right).$$

由动力系数的对称性, 应有

$$\beta T^2=\delta T, \quad 或\ \delta=\beta T.$$

这就是我们所要求的关系式.

因此, 我们可以把通量 $\boldsymbol{i}$ 和 $\boldsymbol{q}$ 写成

$$\begin{aligned}\boldsymbol{i}&=-\alpha\nabla\mu-\beta\nabla T,\\ \boldsymbol{q}&=-\beta T\nabla\mu-\gamma\nabla T+\mu\boldsymbol{i},\end{aligned} \tag{58.5}$$

式中只有三个独立系数 α, β, γ. 在热通量表达式中, 消去 $\nabla\mu$ 是有益的, 这只要用 $\boldsymbol{i}$ 和 ∇T 去代替它. 于是我们有

$$\boldsymbol{i}=-\alpha\nabla\mu-\beta\nabla T, \tag{58.6}$$

$$\boldsymbol{q}=(\mu+\beta T/\alpha)\boldsymbol{i}-\kappa\nabla T, \tag{58.7}$$

其中

$$\kappa=\gamma-\beta^2T/\alpha. \tag{58.8}$$

若扩散通量 $\boldsymbol{i}$ 为零, 则成为**纯导热**. 如果出现这种情况, T 和 μ 必须满足方程

$$\alpha\nabla\mu+\beta\nabla T=0, \quad 或\ \alpha d\mu+\beta dT=0.$$

对这个方程积分得出 $f(c,T)=0$ 形式的关系式, 函数 f 中不显含坐标. (化学势不仅是 c 和 T 的函数, 而且是压力的函数, 但在平衡状态下, 压力是常数.) 此式确定了在没有扩散通量条件下所应保持的浓度与温度的关系. 此外, 因为 $\boldsymbol{i}=0$, 由(58.7)我们有

$$\boldsymbol{q}=-\kappa\nabla T,$$

所以 κ 就是导热系数.

现在我们转而应用通常的变量 p, T 和 c. 我们有

$$\nabla\mu=\left(\frac{\partial\mu}{\partial c}\right)_{p,T}\nabla c+\left(\frac{\partial\mu}{\partial T}\right)_{c,p}\nabla T+\left(\frac{\partial\mu}{\partial p}\right)_{c,T}\nabla p.$$

可以用$(\partial V/\partial c)p,T$ 代替最后一项中的导数$(\partial\mu/\partial p)_{c,T}$，这里$V$是比容[①]．将上式代入(58.6)和(58.7)，并令

$$D=\frac{\alpha}{\rho}\left(\frac{\partial\mu}{\partial c}\right)_{T,p},$$

$$\rho k_T D/T=\alpha\left(\frac{\partial\mu}{\partial T}\right)_{c,p}+\beta, \tag{58.9}$$

$$k_p=p\left(\frac{\partial V}{\partial c}\right)_{p,T}\Big/\left(\frac{\partial\mu}{\partial c}\right)_{p,T}, \tag{58.10}$$

我们得

$$\boldsymbol{i}=-\rho D\left[\nabla c+\frac{k_T}{T}\nabla T+\frac{k_p}{p}\nabla p\right], \tag{58.11}$$

$$\boldsymbol{q}=\left[k_T\left(\frac{\partial\mu}{\partial c}\right)_{p,T}-T\left(\frac{\partial\mu}{\partial T}\right)_{p,c}+\mu\right]\boldsymbol{i}-\kappa\nabla T. \tag{58.12}$$

系数D称为**扩散系数或传质系数**；该式给出只存在浓度梯度时的扩散通量．由温度梯度引起的扩散通量由**热扩散系数**k_TD给出；无量纲量k_T称为**热扩散比**．

关于(58.11)中最后一项，只有当流体中存在较大的压力梯度(比如说，由外力场引起)时才有必要考虑．系数k_pD称为**压力扩散系数**．应注意，根据公式(58.10)，无量纲量k_p仅由热力学性质完全确定．

当然，在单一流体中不存在扩散通量．因此很清楚，在$c=0$和$c=1$这两种极限情况下，k_T和k_p都必须为零．

熵只能增加的条件对公式(58.6)和(58.7)中的系数加了一定

---

① 这两个导数相等是由热力学恒等式

$$d\phi=-s\,dT+V\,dp+\mu\,dc$$

得到的，这里ϕ是单位质量的热力学势

$$(\partial\mu/\partial p)_{c,T}=\partial^2\phi/\partial p\partial c=(\partial V/\partial c)_{p,T}.$$

的限制．把这两个公式代入熵变化率的表达式(57.7)，我们得

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \rho s dV=\int \frac{\kappa(\nabla T)^2}{T^2}dV+\int \frac{\boldsymbol{i}^2}{\alpha T}dV+\cdots \qquad (58.13)$$

因此很清楚，除了我们已知的条件 $\kappa>0$ 以外，还必须有 $\alpha>0$．记住导数 $(\partial\mu/\partial c)_{p,T}$ 总是正的①，因此得出扩散系数必定是正的，即 $D>0$，但是 k_T 和 k_p 可正可负．

我们不准备写出这些冗长的普通方程，这些方程可用上述 $\boldsymbol{i}$ 和 $\boldsymbol{q}$ 的表达式代入(57.3)和(57.6)求得．我们将只考虑这种情形：即没有明显的压力梯度，并且流体浓度和温度的变化不大，以致我们可以假设表达式(58.11)和(58.12)中的系数为常数，尽管一般说来，这些系数是 c 和 T 的函数．此外，我们还假设流体中没有别的宏观运动，只有因温度梯度和浓度梯度而引起的运动，这种运动的速度与这些梯度成正比；因此，方程(57.3)和(57.6)包含速度中的那些项是二阶小量，可略去不计．(57.6)中的项 $-\boldsymbol{i}\cdot\nabla\mu$ 也是二阶小量．所以我们有

$$\rho\partial c/\partial t+\nabla\cdot\boldsymbol{i}=0,\quad \rho T\partial s/\partial t+\nabla\cdot(\boldsymbol{q}-\mu\boldsymbol{i})=0.$$

把 $\boldsymbol{i}$ 和 $\boldsymbol{q}$ 的表达式(58.11)和(58.12)(这时没有 ∇p 项)，代入上式，并对导数 $\partial s/\partial t$ 进行如下变换②

$$\frac{\partial s}{\partial t}=\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_{c,p}\frac{\partial T}{\partial t}+\left(\frac{\partial s}{\partial c}\right)_{T,p}\frac{\partial c}{\partial t}=\frac{c_p}{T}\frac{\partial T}{\partial t}-\left(\frac{\partial\mu}{\partial T}\right)_{p,c}\frac{\partial c}{\partial t},$$

经过简单的计算以后，我们得

$$\frac{\partial c}{\partial t}=D\left[\triangle c+\frac{k_T}{T}\triangle T\right], \qquad (58.14)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t}-\frac{k_T}{c_p}\left(\frac{\partial\mu}{\partial c}\right)_{p,T}\frac{\partial c}{\partial t}=\chi\triangle T. \qquad (58.15)$$

这个线性方程组可确定流体中的温度分布和浓度分布．

---

① 见 *Statistical Physics* § 95(Л. Д. 朗道等，统计物理学 1964)．

② 因为 $(\partial s/\partial c)_{p,T}=-\partial^2\phi/\partial c\partial T=-(\partial\mu/\partial T)_{p,c}$．

浓度很小的情形特别重要．当浓度趋于零时，扩散系数趋于一个有限的常数，但热扩散系数趋于零．因此，若浓度很小，k_T 也很小，我们就可略去(58.14)中的项 $k_T\triangle T$，于是(58.14)变成扩散方程

$$\partial c/\partial t=D\triangle c. \tag{58.16}$$

在不同的情况下，加在(58.16)的解上的边界条件也是不同的，在不溶解于该流体的固体表面上，扩散通量

$$\boldsymbol{i}=-\rho D\nabla c,$$

的法向分量必须为零，即有

$$\partial c/\partial n=0.$$

但假如物体可以溶解在该流体中，因而有来自物体的扩散，则在物面附近可迅速达到平衡，而紧贴物体处的浓度是饱和浓度 c_0；物质由这一层向外扩散要比溶解过程进行得缓慢；因此，在这种物面上的边界条件是 $c=c_0$．最后，若固体表面能吸收落到它上面的扩散物质，则边界条件是 $c=0$；这种情形在研究固体表面上的化学反应时会遇到．

因为纯扩散方程(58.16)与导热方程(50.4)形式完全相同，所以我们可把§51 和§52 中导出的全部公式直接用于扩散情形，只要用 c 代替 T 和 D 代替 χ 就行了．绝热表面的边界条件对应于不溶解表面的边界条件，而保持常温的表面对应于发生扩散的可溶解表面．

特别是，与(51、6)相类比，可写出扩散方程下列形式的解：

$$c(r)=\frac{M}{8\rho(\pi Dt)^{3/2}}\exp(-r^2/4Dt). \tag{58.17}$$

若在 $t=0$ 时刻，溶质全部集中在原点(M 是溶质的总质量)，则上式可给出任何时刻溶质的分布．

问　题

试确定两种完全气体混合物的压力扩散系数.

解: 我们有比容 $V=kT(n_1+n_2)/p$(符号是 § 57 第二个附注中所用过的), 而化学势为①

$$\mu_1=f_1(p,T)+kT\ln\frac{n_1}{n_1+n_2},$$

$$\mu_2=f_2(p,T)+kT\ln\frac{n_2}{n_1+n_2}.$$

根据

$$n_1m_1=c, \qquad n_2m_2=1-c,$$

可用第一个成分的浓度来表示数 n_1 和 n_2. 利用公式(58.10)进行计算, 得出

$$k_p=(m_2-m_1)c(1-c)\left[\frac{1-c}{m_2}+\frac{c}{m_1}\right].$$

§ 59. 流体中悬浮粒子的扩散

在流体分子运动的影响下, 流体中悬浮粒子作无规运动(所谓**布朗运动**). 设初始时刻有一个这样的粒子处于原点. 我们可以把粒子后继的运动看作是扩散; 在这种情况下, 任一特定体元内粒子出现的概率就代表浓度. 因此, 为了确定这个概率, 可利用扩散方程的解(58.17). 能够这样处理的理由是, 对于稀溶液中的扩散(稀溶液即 $c\ll1$, 这时的扩散方程可采用(58.16)的形式), 溶液中诸粒子相互之间几乎没有什么影响, 因此可以独立地研究每个粒子的运动.

设 $w(r,t)dr$ 为时刻 t 在离原点为 r 与 $r+dr$ 之间的距离上粒子出现的概率. 令(58.17)中 $M/\rho=1$, 并乘以球形薄层的体积 $4\pi r^2dr$, 我们得

① 见 *Statistical Physics*, § 92, Pergamon Press, London, 1958. (Л. Д. 朗道, E. M. 栗弗席兹著《统计物理学》杨训恺译, 人民教育出版社, 1964.)

$$w(r,t)dr=\frac{1}{2\sqrt{\pi D^3 t^3}}\exp(-r^2/4Dt)r^2dr. \tag{59.1}$$

现在来确定时刻 t 粒子离开原点的均方距离. 我们有

$$\overline{r^2}=\int_0^\infty r^2 w(r,t)dr. \tag{59.2}$$

利用(59.1),得

$$\overline{r^2}=6Dt, \tag{59.3}$$

因而,经过任一时间间隔,粒子所通过的平均距离与这段时间的平方根成正比.

流体中悬浮粒子的扩散系数可根据所谓**动性系数**来进行计算. 假设有某个不变的外力f(例如重力)作用在粒子上. 在定常状态下,作用在每个粒子上的外力必定被流体施加在运动粒子上的阻力所平衡. 在速度很小的情况下,阻力与速度成正比,比如说等于 v/b,这里 b 是常数. 让这个阻力与外力 f 相等得

$$v=bf, \tag{59.4}$$

即在外力作用下,粒子所获得的速度与外力成正比. 常数 b 称为**动性系数**,原则上它可由流体动力学方程算出. 例如,对半径为 R 的球形粒子,阻力是 $6\pi\eta Rv$(见(20.14)),所以动性系数为

$$b=1/6\pi\eta R. \tag{59.5}$$

对于非球形粒子,阻力与运动方向有关;它可写成 $a_{ik}v_k$ 的形式,这里 a_{ik} 是对称张量(见(20.15)). 为了算出动性系数,必须对粒子的所有方位取平均;若 a_1, a_2, a_3 是这个对称张量的主值,则有

$$b=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}\right). \tag{59.6}$$

动性系数 b 只与扩散系数 D 有关. 为了导出这个关系,我们写出扩散通量 $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{i}$ 包含由浓度梯度引起的普通项 $-\rho D\nabla c$(设温度为常数),还有一项与粒子在外力作用下所获得的速度有关,这一

项显然是 $\rho c\boldsymbol{v}$. 于是

$$\boldsymbol{i}=-\rho D\nabla c+\rho cb\boldsymbol{f}, \tag{59.7}$$

上式中已用了(59.4). 在热力学平衡状态下，没有扩散，所以通量 $\boldsymbol{i}$ 应为零. 在外力场中，流体中悬浮粒子浓度的平衡分布由玻耳兹曼公式确定，根据这个公式

$$c=常数\times e^{-U/kT},$$

式中 U 是外力场中粒子的势能. 因为 $\boldsymbol{f}=-\nabla U$，我们得平衡浓度梯度为 $\nabla c=c\boldsymbol{f}/kT$. 把它代入(59.7)，并令 $\boldsymbol{i}$ 等于零，我们得

$$D=kTb. \tag{59.8}$$

这就是扩散系数与动性系数之间的**爱因斯坦关系**.

把(59.5)代入(59.8)，我们得球形粒子扩散系数的如下表达式

$$D=kT/6\pi\eta R. \tag{59.9}$$

除了悬浮粒子的平移布朗运动和扩散以外，我们还可以研究粒子的旋转布朗运动和扩散. 就像通过阻力计算平移扩散系数那样，同样可以通过在流体中作旋转运动的粒子上所受的力来表达旋转扩散系数①.

问　　题

问题1. 设一些粒子在流体中作布朗运动，流体的一面以平壁为界面；粒子碰到平壁就“粘附”在壁上. 在 $t=0$ 时有一个粒子离壁的距离为 x. 试求在时间 t 以后粒子“粘附”于壁上的概率.

解: 概率分布 $w(x,t)$ (这里 x 是离壁的距离) 由扩散方程确定，方程的

---

① 若(非球形)粒子悬浮在有横向流速梯度的平面平行流束中，则作为流体动力学定向力和无定向布朗运动同时作用的结果，可建立起与粒子的空间方向有关的确定分布. 对于椭球形的粒子，这个问题的解可参看 A. Peterlin and H. A. Stuart, *Zeitschrift für Physik*, **112**, 1, (1939).

边界条件为 $x=0$ 处 $w=0$，初始条件为 $t=0$ 时 $w=\delta(x-x_0)$。这样的解由公式(52.4)给出，只是要用 w、D 和 $\delta(x'-x_0)$ 分别替换式中的 T、χ 和被积函数中的 $T_0(x')$。于是我们得

$$w(x, t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}}\left\{\exp\left[-\frac{(x-x_0)^2}{4Dt}\right]-\exp\left[-\frac{(x+x_0)^2}{4Dt}\right]\right\}.$$

每单位时间内"粘附"到壁上的概率由 $x=0$ 处的扩散通量 $D\frac{\partial w}{\partial x}$ 给出。经过时间 t，所要求的概率 $w(t)$ 为

$$w(t)=D\int_0^t\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{x=0}dt.$$

将 w 代入上式，得

$$w(t)=1-\mathrm{erf}[x_0/2\sqrt{Dt}].$$

问题 2. 设经过一个时间间隔 τ，流体中悬浮的粒子绕其自身轴线转过一个很大的角度，试求 τ 的量级。

解：作布朗运动的粒子，移动相当于其自身线度 a 的距离所花的时间，就是所要求的时间间隔 τ。根据(59.3)我们有 $\tau\sim a^2/D$，再由(59.9)得 $D\sim kT/\eta a$，于是

$$\tau\sim\eta a^3/kT.$$

第七章　表面现象

§ 60. 拉普拉斯公式

在这一章里，我们将研究两种连续介质分界面附近发生的现象(当然，这两种介质实际上是由一个很薄的过渡层隔开的，但过渡层很薄，以致我们可把它当作几何上的一个曲面)．若分界面是弯曲的，则两种介质中曲面附近的压力是不同的．为了确定这种压力差(所谓**表面压力**)，我们考虑到分界面的性质，写出两种介质同时处于热力学平衡状态的条件．

设分界面作一无穷小的位移．我们在移动前的表面上每一点画一法线．以 $\delta\zeta$ 表示法线与移动前和移动后界面的两交点之间法线线段的长度．于是这两个面之间的体元是 $\delta\zeta df$，这里 df 是面元．令 p_1 和 p_2 为两种介质内的压力，若分界面是向介质 2 位移(比如说)，则把 $\delta\zeta$ 看作是正的．因而实现上述体积变化所需要的功为

$$\int(-p_1+p_2)\delta\zeta df.$$

再加上与界面面积变化有关的功，即得移动界面所需的总功 δR．后一部分功与界面面积的变化 δf 成正比，且为 $\alpha\delta f$，这里 α 称为**表面张力系数**[①]．于是总功为

---

① 对空气和水的界面而言，在 20°C 时 $\alpha=72.5\frac{\text{尔格}}{\text{厘米}^2}$；对空气和石蜡的界面，在 20°C 时 $\alpha=24$．液态金属的表面张力很大；例如，在空气和水银的界面上，在 175°C时 $\alpha=547$；空气和铂的界面在 2000°C 时 $\alpha=1820$．液氢与其蒸汽间的表面张力很小，在 -270°C 时 $\alpha=0.24$．

$$\delta R=-\int(p_1-p_2)\delta\zeta df+\alpha\delta f \tag{60.1}$$

当然，热力学平衡的条件是 δR 为零.

下面，令 R_1 和 R_2 为界面某个给定点处的主曲率半径；若 R_1 和R_2 指向介质 1 内，就把它们算作正的. 因此，当界面经过一无穷小的位移后，界面和主截面交线上的长度元 dl_1 和 dl_2 分别得到增量$(\delta\zeta/R_1)dl_1$ 和$(\delta\zeta/R_2)dl_2$，这里 dl_1 和 dl_2 被看作是以 R_1 和 R_2 为半径的圆周的弧元. 因此，面元 $df=dl_1dl_2$ 经过位移以后变成

$$dl_1\left(1+\frac{\delta\zeta}{R_1}\right)dl_2\left(1+\frac{\delta\zeta}{R_2}\right)\approx dl_1dl_2\left(1+\frac{\delta\zeta}{R_1}+\frac{\delta\zeta}{R_2}\right),$$

即面元改变了$\delta\zeta df(1/R_1+1/R_2)$. 由此可见，分界面面积总的变化量为

$$\delta f=\int\delta\zeta\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)df. \tag{60.2}$$

把这个表达式代入(60.1)并让它等于零，我们得平衡条件的形式为

$$\int\delta\zeta\left\{(p_1-p_2)-\alpha\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)\right\}df=0.$$

对于界面一切可能的无穷小的位移，即对于所有的 $\delta\zeta$，这个条件都必须成立. 因此大括号内的表达式必须恒等于零，即

$$p_1-p_2=\alpha\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right) \tag{60.3}$$

这就是确定表面压力的**拉普拉斯公式**. 由此得知，若 R_1 和 R_2 为正，则 $p_1-p_2>0$. 这说明凸表面的介质中压力更大. 若 $R_1=R_2=\infty$，即分界面为平面，则如我们所预想的，两种介质中压力相同.

我们用(60.3)来研究两个相邻接的介质的力学平衡. 我们假设分界面上和介质本身都不受外力作用. 利用公式(60.3)，我们

可把平衡方程写成

$$\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}=\text{常数}. \tag{60.4}$$

因而在自由分界面任何地方，曲率之和一定是常数. 若整个曲面都是自由的，条件(60.4)表明该曲面必定是球面(例如，小滴的表面；对小滴而言，重力影响可以略去). 但若曲面由某一条曲线支撑(例如固体框架上的液膜)，其形状就比较复杂了.

当条件(60.4)用于支撑在固体框架上的薄膜的平衡状况时，该式右边的常数必定为零. 因为在薄膜的自由面上，二项之和 $1/R_1+1/R_2$ 必定处处相同，而在薄膜的反面必定符号相反，这是由于若一面是凸的，则另一面就是凹的，所以曲率半径大小相等符号相反. 于是我们得到薄膜的平衡条件是

$$\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}=0. \tag{60.5}$$

现在来研究重力场中介质表面上的平衡条件. 为简单起见，我们假设介质 2 就是大气，在整个界面上其压力可当作常数，而介质 1 是不可压缩流体. 于是有 $p_2=$常数，而根据(3.2)流体的压力为 $p_1=\text{常数}-\rho g z$，坐标 z 的正向铅垂向上. 因而平衡条件变成

$$\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{g\rho z}{\alpha}=\text{常数}. \tag{60.6}$$

应该说明，为了确定具体情况下流体表面的平衡形状，通常比较方便的办法是不用(60.6)形式的平衡条件，而是直接求解使总自由能为极小值的变分问题. 不可压缩流体的内部自由能只依赖于流体的体积，而不依赖于流体表面的形状. 流体表面形状首先影响表面自由能 $\int \alpha df$，其次影响外力(重力)场中的能量 $\rho g\int z\,dV$. 于是平衡条件可写成

$$\alpha\int df+\rho g\int z dV=\text{最小值}. \tag{60.7}$$

这最小值要根据条件

$$\int dV = \text{常数} \tag{60.8}$$

来确定，这个条件表示流体的体积是不变的.

在平衡条件(60.6)和(60.7)中，常数 α, ρ 和 g 仅仅以 $\alpha/g\rho$ 的形式出现. 这个比数的量纲是厘米^2. 长度

$$a = \sqrt{\frac{2\alpha}{\rho g}} \tag{60.9}$$

称为该物质的**毛细常数**①. 流体表面的形状仅由这个量确定. 若毛细常数与介质的线度相比是个大量，则确定流体表面形状时可略去重力.

为了由条件(60.4)或(60.6)求得流体表面的形状，我们需要有能定出表面形状的曲率半径的公式. 这些公式是在微分几何里得到的；但在一般情况下，这些公式相当复杂. 当曲面与平面差别不大时，这些公式可大大简化. 下面我们不用微分几何的一般结果，而直接导出相当的公式.

设 $z=\zeta(x, y)$ 是这个曲面的方程；我们假设 ζ 处处都很小，即曲面与平面 $z=0$ 差别很小. 大家知道，这个曲面的面积由下列积分给出

$$f = \int\sqrt{1+\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)^2}\,dxdy,$$

或对于小的 ζ 值，由下式近似给出

$$f = \int\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)^2\right]dxdy. \tag{60.10}$$

变分 δf 是

$$\delta f = \int\left\{\frac{\partial\zeta}{\partial x}\frac{\partial\delta\zeta}{\partial x}+\frac{\partial\zeta}{\partial y}\frac{\partial\delta\zeta}{\partial y}\right\}dxdy.$$

---

① 例如，水在 20°C 时，$a=0.122$ 厘米.

分部积分得

$$\delta f=-\int\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right)\delta\zeta dxdy,$$

将上式与(60.2)进行比较，我们得

$$\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}=-\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right). \qquad (60.11)$$

这就是我们所要求的公式；此式给出稍微弯曲曲面的曲率之和.

当三个相邻接的介质处于平衡时，这些分界面的条件是在三个介质的公共交线上，三个表面张力的合力为零．这个条件表明，这些分界面必定以一定的角度(所谓**接触角**)相交，这些角度由各个表面张力系数的数值确定①.

最后，我们来研究在考虑表面张力的情况下，两种运动流体交界面上所必须满足的边界条件问题．如果不计表面张力，在流体的交界面上有

$$n_k(\sigma_{2,ik}-\sigma_{1,ik})=0,$$

这表示两种流体表面上所受的粘性摩擦力相等．当考虑表面张力时，必须在上式右边加上一个力，这个力的大小由拉普拉斯公式给出，方向与法线一致．

$$n_k\sigma_{2,ik}-n_k\sigma_{1,ik}=\alpha\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)n_i. \qquad (60.12)$$

这个方程也可写成

$$(p_1-p_2)n_i=(\sigma'_{1,ik}-\sigma'_{2,ik})n_k+\alpha\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)n_i. \qquad (60.13)$$

若两种流体都是理想的，则粘性应力 σ'_{ik} 为零，我们又回到简单的方程(60.3).

---

① 例如参看 *Statistical Physics*, §145, Pergamon Press, London 1958.(Л.Д.朗道，E.M.栗弗席兹著，《统计物理学》，§140，杨训恺等译人民教育出版社，1964.)

但条件(60.13)仍然不是最一般的表达式．原因在于整个表面上的表面张力系数α不可能是一个常数(例如，由于温度变化)．因而除了法向力以外(如是平面，则表面法向力为零)，还有一个与表面相切的力．正如压力不均匀情况下，单位体积上有一个体积力$-\nabla p$(见§2)一样，这里分界面单位面积上有一个切向力$\boldsymbol{f}_t=\nabla\alpha$．这时，我们取正的梯度，因为表面张力倾向于使表面面积减小；而压力倾向于使体积增大．把这个力加到方程(60.13)的右边，我们得边界条件

$$\left[p_1-p_2-\alpha\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)\right]n_i=(\sigma'_{1,ik}-\sigma'_{2,ik})n_k+\frac{\partial\alpha}{\partial x_i};\quad(60.14)$$

这里单位法向矢量$\boldsymbol{n}$是指向介质1．应注意，这个条件只能为粘性流体所满足；在理想流体中，$\sigma'_{ik}=0$，则方程(60.14)的左边是沿法线方向的矢量，而这时右边是沿切线方向的矢量．当然两边不能相等，除非两边都为零；但后一种情形是没有意义的．

问 题

问题 1. 设液体薄膜由两个圆框所支撑，两圆框的平面互相平行，两圆心在垂直于圆框平面的直线上，试确定液体薄膜的形状．(图 31 中实线表示这个薄膜的子午截线.)

解： 这个问题相当于寻求一个面积为极小值的曲面，这个曲面可以用通过两给定点A和B之间的曲线$r=r(z)$绕直线$r=0$旋转而成．这个旋转曲面的面积是

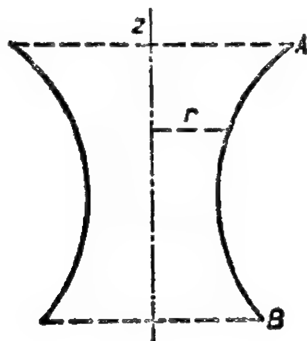


图 31

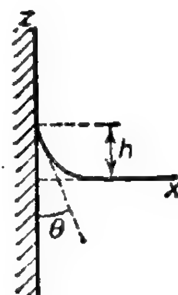


图 32

$$f=2\pi\int_{z_1}^{z_2} r\sqrt{1+\left(\frac{dr}{dz}\right)^2}dz.$$

我们知道

$$\int_{t_1}^{t_2} L(x,\dot{x}')dt$$

形式的积分的极小值由方程 $L-\dot{x}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=$ 常数定出. 在现在情况下, 此式给出

$$r=c_1\sqrt{1+\left(\frac{dr}{dz}\right)^2},$$

由此式积分, 我们得

$$r=c_1\cosh\frac{z-c_2}{c_1},$$

因而, 所要求的曲面(称悬链曲面)由一条悬链线旋转而成. 常数 c_1 和 c_2 的选择应使曲线 $r(z)$ 通过给定点 A 和 B. c_2 的数值只依赖于 z 轴上原点的选择. 但对于常数 c_1, 我们求得两个值, 而必须选取较大的一个(较小的一个不能给出上述积分的极小值).

当两框间的距离 h 增加到某个值时, 求常数 c_1 的方程不再有实根. 对于更大的 h 值, 只有当每个圆框上构成一片薄膜时, 形状才是稳定的. 例如, 对于半径 R 相等的两个圆框, 当距离 $h>1.33R$ 时, 这种悬链曲面的形状就不可能出现了.

问题 2. 设流体处于重力场中, 一面以铅垂的平壁为边界, 流体与壁的夹角为 θ(图 32), 试确定流体表面的形状.

解: 我们取坐标轴如图 32 所示. 平面 $x=0$ 是平壁的平面, 而 $z=0$ 是远离平壁处流体表面的平面. 表面 $z=z(x)$ 的曲率半径是 $R_1=\infty$, $R_2=-(1+z'^2)^{3/2}/z''$, 所以方程(60.6)变成

$$\frac{2z}{a^2}-\frac{z''}{(1+z'^2)^{3/2}}=\text{常数},\tag{1}$$

这里 a 是毛细常数. 因为 $x=\infty$ 时, 应有 $z=0, 1/R_2=0$, 所以, 式(1)右边的常数为零. 以上方程的一次积分为

$$\frac{1}{\sqrt{1+z'^2}}=A-\frac{z^2}{a^2}.\tag{2}$$

根据无穷远处的条件($x=\infty$ 处, $z=z'=0$), 我们得 $A=1$. 二次积分为

$$x=-\frac{a}{\sqrt{2}}\cosh^{-1}\frac{\sqrt{2}a}{z}+a\sqrt{2-\frac{z^2}{a^2}}+x_0.$$

常数 x_0 的选择应使得在($x=0$)壁面上，有 $z'=-\mathrm{ctg}\theta$，或按(2)，$z=h$，这里 $h=a\sqrt{1-\sin\theta}$是流体沿壁面上升的高度.

问题 3. 设液体在两块铅垂的平行平板间上升，试确定液体表面的形状(图 33).

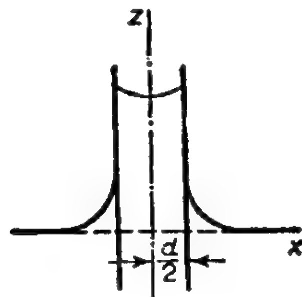


图 33

解: 我们取 yz 平面位于两个平板的正中间，xy 平面与远离平板处的流体表面相重合. 问题 2 中的方程(1)给出了平衡条件，因而它在流体表面上(两板之间和两板之外)处处成立，现在在方程(1)中应用 $x=\infty$ 处的条件，也给出常数为零. 在其积分式(2)中，现在常数 A 对 $|x|>\frac{1}{2}d$ 和 $|x|<\frac{1}{2}d$ 是不同的(在 $|x|=\frac{1}{2}d$ 处，函数 $z(x)$ 有间断). 对于两板之间的空间，条件是 $x=0$ 处 $z'=0$，$x=\frac{1}{2}d$ 处 $z'=\mathrm{ctg}\theta$，这里 θ 是接触角. 根据(2)，对高度 $z_0=z(0)$ 和 $z_1=z\left(\frac{1}{2}d\right)$而言，我们有 $z_0=a\sqrt{A-1}$，$z_1=a\sqrt{A-\sin\theta}$. 对 (2) 积分可得

$$x=\int_{z_0}^{z}\frac{A-\dfrac{z^2}{a^2}}{\sqrt{1-\left(A-\dfrac{z^2}{a^2}\right)^2}}dz=\frac{a}{2}\int_0^{a\sqrt{A-\cos\xi}=z}\frac{\cos\xi}{\sqrt{A-\cos\xi}}d\xi,$$

这里 ξ 是一个新的变量，与 z 的关系是 $z=a\sqrt{A-\cos\xi}$. 这是椭圆积分，不能用初等函数表示. 常数 A 由条件 $x=\frac{1}{2}d$ 处 $z=z_1$，或

$$d=a\int_0^{\frac{\pi}{2}-\theta}\frac{\cos\xi}{\sqrt{A-\cos\xi}}d\xi$$

求得. 上面得到的公式给出了两板之间的空间内流体表面的形状. 当 $d\to 0$ 时，A 趋于无穷大. 因此对于 $d\ll a$ 情形，我们有

$$d\approx\frac{a}{\sqrt{A}}\int_0^{\frac{\pi}{2}-\theta}\cos\xi d\xi=\frac{a}{\sqrt{A}}\cos\theta,$$

或

$$A=(a^2/d^2)\cos^2\theta.$$

流体上升的高度是

$$z_0\approx z_1\approx(a^2/d)\cos\theta;$$

当然，这个公式也可直接求得.

问题4. 设有一受热不均匀的流体薄层紧贴在一个水平固体平面的表面上；在流体薄层的平面内，温度是坐标 x 的某个已知函数，(因为流体层很薄)可以假设与穿过流体层的坐标 z 无关. 受热不均匀引起薄层内发生定常流，因此在 x 方向，薄层的厚度 ζ 也就发生变化，试求函数 $\zeta(x)$.

解： 流体的密度 ρ 和表面张力 α 以及温度都是 x 的已知函数. 流体压力 $p=p_0+\rho g(\zeta-z)$，这里 p_0 是大气压(自由面上的压力)；由表面弯曲引起的压力变化可略去不计. 我们假设薄层中流体各点的速度都与 x 轴平行. 运动方程为

$$\eta\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}=\frac{\partial p}{\partial x}=g\left[\frac{d(\rho\zeta)}{dx}-z\frac{d\rho}{dx}\right]. \tag{1}$$

在固体表面上 $(z=0)$，有 $v=0$；而在自由面上 $(z=\zeta)$，必须满足边界条件(60.14)，在目前情况下就是 $\eta(dv/dz)_{z=\zeta}=d\alpha/dx$. 对方程(1)进行积分并使用这些边界条件，我们得

$$\eta v=gz\left(\zeta-\frac{z}{2}\right)\frac{d(\rho\zeta)}{dx}-\frac{gz}{6}(3\zeta^2-z^2)\frac{d\rho}{dx}-z\frac{d\alpha}{dx}. \tag{2}$$

因为流动是定常的，通过薄层截面的总质量通量应为零，即

$$\int_0^\zeta v\,dz=0.$$

将(2)式代入，我们得

$$\frac{\rho}{3}\frac{d(\zeta^2)}{dx}+\frac{\zeta^2}{4}\frac{d\rho}{dx}=\frac{1}{g}\frac{d\alpha}{dx},$$

此式可确定函数 $\zeta(x)$. 积分后即得

$$g\zeta^2=3\rho^{-3/4}\left[\int\rho^{-1/4}d\alpha+\text{常数}\right]. \tag{3}$$

若温度(因而 ρ 和 α)只有微小的变化，则(3)可写成

$$\zeta^2=\zeta_0^2\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{3/4}+\frac{3}{\rho g}(\alpha-\alpha_0),$$

这里 ζ_0 是 $\rho=\rho_0$ 和 $\alpha=\alpha_0$ 那一点上 ζ 的值.

§61. 表面张力波

在重力的作用下和在表面张力的作用下，流体的表面都倾向于形成平衡形状. 在§12和§13中研究流体表面波的时候，我们没有考虑表面张力. 下面我们将看到，毛细作用对小波长的重力波有很重要的影响.

像§12中那样，我们假设振动的幅度与波长相比是个小量. 关于速度势，和以前一样有方程

$$\triangle\phi=0.$$

但现在流体表面上的条件是不同的，即表面两侧的压力差不再像§12中那样假设为零，而是由拉普拉斯公式(60.3)给出.

我们用ζ表示表面上点的z坐标. 因为ζ很小，我们可以利用表达式(60.11)，并把拉普拉斯公式写成

$$p-p_0=-\alpha\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right).$$

这里p是贴近表面的流体压力，p_0是恒定的外压力. 由(12.2)

$$p=-\rho g\zeta-\rho\frac{\partial\phi}{\partial t},$$

将上式代换前一式的p，得

$$\rho g\zeta+\rho\frac{\partial\phi}{\partial t}-\alpha\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right)=0;$$

由于§12中所说的同样理由，如果把ϕ重新定义一下，我们可以去掉常数p_0. 把上式对t求导数，并用$\partial\phi/\partial z$代替$\partial\zeta/\partial t$，我们得关于势ϕ的边界条件

$$\rho g\frac{\partial\phi}{\partial z}+\rho\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}-\alpha\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\right)=0,$$

$$\text{对 } z=0. \tag{61.1}$$

我们来研究沿x轴方向传播的平面波. 像§12中一样，我

们得

$$\phi = Ae^{kz}\cos(kx-\omega t)$$

形式的解. 根据边界条件(61.1), 于是求得 k 与 ω 的关系为

$$\omega^2 = gk + \alpha k^3/\rho. \tag{61.2}$$

由此看出, 对于像

$$k \ll \sqrt{\rho g/\alpha} \quad 或 \quad k \ll 1/a$$

这样的长波(这里 a 是毛细常数), 毛细作用的影响可略去不计, 而成为纯重力波. 反之, 在短波长的情况下, 重力的影响可略去不计. 于是

$$\omega^2 = \alpha k^3/\rho. \tag{61.3}$$

这样的波称为**表面张力波或涟波**. 中间情形的波叫做**表面张力重力波**.

我们再来确定在表面张力作用下, 不可压缩流体球形小滴振动的性质. 振动使小滴表面偏离球形. 像通常一样, 我们假设振动的幅度很小.

我们从确定一个表面稍微偏离球面时的和数 $1/R_1+1/R_2$ 开始. 在这里我们按照推导公式(60.11)的办法来进行. 在球坐标 r, θ, ϕ①中, 用函数 $r=r(\theta,\phi)$ 给出的表面面积为

$$f = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sqrt{r^2+\left(\frac{\partial r}{\partial\theta}\right)^2+\frac{1}{\sin^2\theta}\left(\frac{\partial r}{\partial\phi}\right)^2}\, r\sin\theta d\theta d\phi. \tag{61.4}$$

球面由 $r=$常数$\equiv R$ 表示(这里 R 是球的半径); 而相近的表面用 $r=R+\zeta$ 表示, 这里 ζ 是个小量. 把它代入(61.4), 我们得

$$f = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left\{(R+\zeta)^2+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\zeta}{\partial\theta}\right)^2+\frac{1}{\sin^2\theta}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial\phi}\right)^2\right]\right\}\sin\theta d\theta d\phi.$$

我们来求当 ζ 变化时这个面积的变分 δf. 于是有

---

① 在本节后面部分, 我们用 ϕ 表示方位角, 而用 ψ 表示速度势.

$$\delta f=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left\{2(R+\zeta)\delta\zeta+\frac{\partial\zeta}{\partial\theta}\frac{\partial\delta\zeta}{\partial\theta}+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial\zeta}{\partial\phi}\frac{\partial\delta\zeta}{\partial\phi}\right\}\sin\theta d\theta d\phi.$$

将第二项对 θ 进行分部积分，第三项对 ϕ 分部积分，我们得

$$\delta f=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left\{2(R+\zeta)-\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\zeta}{\partial\theta}\right)\right.$$
$$\left.-\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\zeta}{\partial\phi^2}\right\}\delta\zeta\sin\theta d\theta d\phi.$$

若将大括号内的表达式除以 $R(R+2\zeta)$，则根据(60.2)，这样得到的被积函数中

$$\delta\zeta\delta f\approx\delta\zeta R(R+2\zeta)\sin\theta d\theta d\phi$$

的系数就是所要求的曲率之和，它精确到 ζ 的一次方项．于是得

$$\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}=\frac{2}{R}-\frac{2\zeta}{R^2}-\frac{1}{R^2}\left\{\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\zeta}{\partial\phi^2}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\zeta}{\partial\theta}\right)\right\}. \tag{61.5}$$

式中第一项对应于球面，即 $R_1=R_2=R$.

速度势 ψ 满足拉普拉斯方程

$$\Delta\psi=0$$

并且在 $r=R$ 处有类似于平面表面情形中的边界条件．

$$\rho\frac{\partial\psi}{\partial t}+\alpha\left\{\frac{2}{R}-\frac{2\zeta}{R^2}-\frac{1}{R^2}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\zeta}{\partial\theta}\right)\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\zeta}{\partial\phi^2}\right]\right\}+p_0=0.$$

常数 $p_0+2\alpha/R$ 也可略去；将上式对 t 求导数，并令 $\partial\zeta/\partial t=v_r=\partial\psi/\partial r$，最后得关于 ψ 的边界条件

$$\rho\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}-\frac{\alpha}{R^2}\left\{2\frac{\partial\psi}{\partial r}+\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}\right]\right\}=0\qquad \text{对 } r=R. \tag{61.6}$$

我们寻找下列驻波形式的解：

$$\psi = e^{-i\omega t} f(r, \theta, \phi)$$

这里函数 f 满足拉普拉斯方程 $\Delta f = 0$. 大家知道, 拉普拉斯方程的任一个解都可表成所谓**体积球调和函数**

$$r^l Y_{lm}(\theta, \phi)$$

的线性组合, 这里 $Y_{lm}(\theta, \phi)$ 是拉普拉斯球调和函数:

$$Y_{lm}(\theta, \phi) = P_l^m(\cos\theta) e^{im\phi}$$

这里

$$P_l^m(\cos\theta) = \sin^m\theta d^m P_l(\cos\theta) / d(\cos\theta)^m$$

是所谓**连带勒让特函数**, $P_l(\cos\theta)$ 是 l 阶的勒让特多项式. 大家知道, l 取零以上的所有整数值, 而 m 取值 0, ±1, ±2, ⋯±l.

因此, 我们寻求这个问题下列形式的特解

$$\psi = A e^{-i\omega t} r^l P_l^m(\cos\theta) e^{im\phi}. \tag{61.7}$$

频率 ω 应使边界条件(61.6)能得到满足. 将表达式(61.7)代入(61.6), 并利用球调和函数 Y_{lm} 满足

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y_{lm}}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y_{lm}}{\partial\phi^2} + l(l+1) Y_{lm} = 0,$$

的事实, (消去 ψ) 我们得

$$\rho\omega + \frac{l\alpha[2 - l(l+1)]}{R^3} = 0$$

或

$$\omega^2 = \frac{\alpha l(l-1)(l+2)}{\rho R^3}. \tag{61.8}$$

这个公式给出球滴表面张力振动的本征频率. 我们看出, 该频率只依赖于 l, 而不依赖于 m. 但对一给定的 l 却有 $2l+1$ 个不同的函数(61.7)相对应. 于是(61.8)的每一个频率都对应于 $2l+1$ 个不同的振动. 具有同一频率的几个独立振动称为**简并振动**; 在目前情况下, 我们有 $(2l+1)$ 重简并.

若 $l=0$ 和 $l=1$, 表达式(61.8)变为零. 值 $l=0$ 对应于径向

振动，即对应于小滴的球对称脉动；在不可压缩流体中，这样的振动显然是不可能的．对应于 $l=1$ 的运动就是小滴整个地平动．小滴振动最小可能的频率对应于 $l=2$，并且是

$$\omega_{\min}=\sqrt{\frac{8\alpha}{\rho R^3}}. \tag{61.9}$$

当粘性流体薄层沿铅垂的壁向下流动时，会看到一种由表面张力引起的独特波动．卡皮查已经指出：这种波动一定是由于在较小雷诺数时出现的基本流动的不稳定性引起的①．

问　　题

问题 1. 设在深度为 h 的流体表面上有表面张力重力波，试求这种波的频率与波数的关系．

解： 把 $\phi=A\cos(kx-\omega t)\cosh k(z+h)$ 代入条件(61.1)(见§12问题1)，我们得

$$\omega^2=(gk+\alpha k^3/\rho)\tanh kh.$$

对于 $kh\gg1$ 情形，我们又回到公式(61.2)，而对于长波($kh\ll1$)我们有

$$\omega^2=ghk^2+\alpha hk^4/\rho.$$

问题 2. 试求表面张力波的阻尼系数

解： 把(61.3)代入(25.5)，我们得

$$\gamma=\frac{2\eta k^2}{\rho}=\frac{2\eta\omega^{4/3}}{\rho^{1/3}\alpha^{2/3}}.$$

问题 3. 在考虑表面张力的条件下，试求重力场中水平切向间断稳定性的条件(假设间断面两边是不同的流体)．

解： 设 U 为上层流体相对于下层流体的速度．我们在基本流动上叠加沿水平方向周期性的扰动，并寻求下列形式的速度势

$$\phi=Ae^{kz}\cos(kx-\omega t)\qquad \text{在下层流体中，}$$

$$\phi'=A'e^{-kz}\cos(kx-\omega t)+Ux\qquad \text{在上层流体中．}$$

对于下层流体，在间断面上有

$$v_z=\frac{\partial\phi}{\partial z}=\frac{\partial\zeta}{\partial t},$$

① 见 П. Л. Капица, жэтф 18, 3, (1948).

这里 ζ 是间断面的铅垂坐标；而对于上层流体

$$v'_z=\frac{\partial\phi'}{\partial z}=U\frac{\partial\zeta}{\partial x}+\frac{\partial\zeta}{\partial t}.$$

间断面上两种流体内压力相抵的条件是

$$\rho\frac{\partial\phi}{\partial t}+\rho g\zeta-\alpha\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}=\rho'\frac{\partial\phi'}{\partial t}+\rho' g\zeta+\frac{1}{2}\rho'(v'^2-U^2);$$

在展开表达式 v'^2-U^2 时，只需保留 A' 的一阶项. 我们寻求

$$\zeta=a\sin(kx-\omega t)$$

形式的位移 ζ. 把 ϕ, ϕ' 和 ζ 代入上面三个条件，并取 $z=0$，我们得到三个方程，从中消去 a, A 和 A'，得

$$\omega=\frac{k\rho' U}{\rho+\rho'}\pm\sqrt{\frac{kg(\rho-\rho')}{\rho+\rho'}-\frac{k^2\rho\rho' U^2}{(\rho+\rho')^2}+\frac{\alpha k^3}{\rho+\rho'}}.$$

为了使上式对所有的 k 都是实数，必须有

$$U^4\leqslant 4\alpha g(\rho-\rho')\frac{(\rho+\rho')^2}{\rho^2\rho'^2}.$$

若这个条件不成立，则有复数 ω，其虚部为正数，因而运动就是不稳定的.

§ 62. 吸附膜对液体运动的影响

在流体表面上存在吸附物质的薄膜，对表面的流体动力学特性会有重要影响. 原因是，当表面形状随着液体运动而发生变化时，薄膜就被拉伸或压缩，也就是吸附物质的表面浓度发生变化. 这些变化要引起某种附加的力，这种力必须加到自由面的边界条件中去.

这里只研究不溶于该液体的物质的吸附膜. 这意思是说，吸附物质全部在表面上，而不渗入液体内部. 若吸附物质是相当易溶的，则必须考虑在薄膜浓度发生变化的情况下，薄膜与液体体积之间的物质扩散.

在有吸附物质的情况下，表面张力系数 α 是吸附物质表面浓度（单位表面面积的物质质量）的函数，我们用 γ 表示表面浓度. 若 γ 沿着表面是变化的，则系数 α 也是表面上各点坐标的函数. 所

以液体表面上的边界条件包含有一个切向力，我们在§60的末尾已讨论过这种力(方程(60.14))．在目前情况下，α 的梯度可用表面浓度梯度表示，所以作用在表面上的切向力为

$$\boldsymbol{f}_i=(\partial\alpha/\partial\nu)\nabla\gamma \tag{62.1}$$

在§60中曾说过，计入这种力的边界条件(60.14)只有粘性流体才能满足．由此可知，如果液体的粘性系数很小，而且对所研究的现象并不重要，则在这样的情况下，就没有必要考虑薄膜的存在．

为了确定有薄膜覆盖的流体的运动，除了利用运动方程以及边界条件(60.14)以外，我们必须再加上一个方程，因为现在有另一个未知量，即面浓度 γ．这个新增加的方程就是"连续方程"，它表示薄膜中吸附物质的总量不变．这个方程的具体形式依赖于表面形状．若表面是平面，则这个方程显然是

$$\frac{\partial\gamma}{\partial t}+\frac{\partial(\gamma v_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\gamma v_y)}{\partial y}=0, \tag{62.2}$$

这里所有的量都取表面(取作 xy 平面)上的值．

若薄膜可假设为不可压缩的，也就是假设运动过程中薄膜任一面元的面积都保持不变，则有吸附膜覆盖的液体运动问题的解将得到大大简化．

吸附膜在流体动力学方面起重要作用的一个例子是讨论气泡在粘性流体中的运动．若气泡表面上没有什么膜，则气泡内的气体也会发生运动，于是液体作用在气泡上的阻力就与作用在同样半径固体球上的阻力不同(见§20问题2)．但若气泡上包着一层吸附物质的膜，则由对称性可知，当气泡运动时薄膜显然保持不动．因为薄膜内的运动如果是沿着气泡表面的子午线进行的话，结果物质就会不断地向一个极点聚集(这是由于吸附物质不渗入液体或气体)，当然这是不可能的．除了薄膜的速度以外，气泡表面上的气体速度也必须为零，并且由于这样的边界条件，气泡里面

的气体也必须完全静止．于是有薄膜覆盖的气泡就像固体球一样运动，特别是，它所受的阻力（对于小雷诺数情形）由斯托克斯公式给出．这个结果是列维奇得到的，下列《问题》的解也是他给出的①.

问题

问题 1. 设两个容器由一条深长的渠道相连，渠道的平面壁相互平行，宽为 a 长为 l．在这个系统中的液体表面上覆有一个吸附膜，两个容器中薄膜的面浓度 γ_1 和 γ_2 是不同的．这使渠道中液体表面附近发生运动．试求由这种运动所输运的薄膜物质的数量.

解： 我们取渠道的一个平面壁为 xz 平面，液体的表面为 xy 平面，所以 x 轴是沿着渠道的；液体是在 $z<0$ 的区域内．因为没有压力梯度，所以定常流方程为（见 § 17）

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}=0 \tag{1}$$

这里 v 是液体流速，显然是沿 x 轴方向．沿渠道有浓度梯度 $d\gamma/dx$．在渠道中液体的表面上，我们有边界条件

$$\eta\frac{\partial v}{\partial z}=\frac{d\alpha}{dx} \qquad 对\ z=0 \tag{2}$$

在渠道壁上，液体必须静止，即

$$v=0 \qquad 对\ y=0 \quad 和\ y=a \tag{3}$$

假设渠道的深度为无穷大，所以有

$$v=0 \qquad 对\ z\to-\infty \tag{4}$$

满足条件（3）和（4）的方程（1）的特解为

$$v_n=常数\times\exp\left[\frac{(2n+1)\pi z}{a}\right]\sin\frac{(2n+1)\pi y}{a},$$

其中 n 为整数．条件（2）由总和

① 更详细的讨论见 В. Т. Левич, *Физико-Химическая Гидродинамика*, Иэд. АН СССР(1952).

$$v=\frac{4a}{\eta\pi^2}\frac{d\alpha}{dx}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\exp\left[\frac{(2n+1)\pi z}{a}\right]\sin\frac{(2n+1)\pi y}{a}}{(2n+1)^2}$$

所满足．单位时间内所输运的薄膜物质的数量为

$$Q=\int_0^a\gamma[v]_{z=0}dy=\frac{8a^2}{\eta\pi^3}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}\right)\gamma\frac{d\alpha}{dx},$$

运动是沿 α 增加的方向发生的．沿着渠道 Q 值显然应为常数．因此我们可写成

$$\gamma\frac{d\alpha}{dx}=\text{常数}\equiv\frac{1}{l}\int_0^l\gamma\frac{d\alpha}{dx}dx=\frac{1}{l}\int_{\alpha_2}^{\alpha_1}\gamma d\alpha,$$

这里 $\alpha_1=\alpha(\gamma_1)$, $\alpha_2=\alpha(\gamma_2)$，我们假设有 $\alpha_1>\alpha_2$．于是最后得

$$Q=\frac{8a^2}{\eta l\pi^3}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}\right)\int_{\alpha_2}^{\alpha_1}\gamma d\alpha=0.27\,\frac{a^2}{\eta l}\int_{\alpha_2}^{\alpha_1}\gamma d\alpha.$$

问题 2. 设在覆有吸附膜的液体表面上有表面张力波，试求这种波的阻尼系数．

解： 若液体的粘性系数不太大，则液体作用在薄膜上的(切向)伸张力就不大，因此可以把薄膜看作是不可压缩的．这样，我们在计算能量耗散时，就可认为似乎耗散是在固壁上发生的，即根据公式(24.14)来计算．把速度势写成如下形式，即

$$\phi=\phi_0e^{ikx-i\omega t}e^{-kz},$$

得表面上单位面积的耗散为

$$\overline{\dot{E}_{\text{动}}}=-\sqrt{\frac{1}{8}\rho\eta\omega}|k\phi_0|^2.$$

单位面积上总能量为

$$\overline{E}=\rho\int\overline{v^2}dz=\frac{1}{2}\rho|k\phi_0|^2/k.$$

利用(61.3)得阻尼系数为

$$\gamma=\frac{\omega^{7/6}\eta^{1/2}}{2\sqrt{2}\,\alpha^{1/3}\rho^{1/6}}=\frac{k^{7/4}\eta^{1/2}\alpha^{1/4}}{2\sqrt{2}\,\rho^{3/4}}.$$

这个量与纯洁表面上表面张力波阻尼系数(§61 问题 2)之比是

$$\frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\frac{\alpha\rho}{k\eta^2}\right)^{1/4},$$

只要波长不是非常小，这个比值与1相比就是个大量．因此，液体表面上有吸附膜会使表面张力波的阻尼系数显著增大。